Το δυναμικό μιας σφαίρας με φορτίο ομοιόμορφα κατανεμημένο
Ν. Λυγερός

Όταν τα ηλεκτρομαγνητικά φαινόμενα είναι χρονικά αμετάβλητα, οι εξισώσεις που προσδιορίζουν το ηλεκτρικό πεδίο είναι: $\vec{\nabla} E = \frac{\rho}{s_0}$ και $\vec{\nabla} \times E = 0$

Μέσω της δεύτερης εξίσωσης συνεπάγεται: $E = -\vec{\nabla}\Phi$

Και βρίσκουμε τη διαφορική εξίσωση του Poisson: $\vec{\nabla}^2 \Phi = -\frac{\rho}{s_0}$

Έστω μία σφαίρα ακτίνας R με συνολικό φορτίο q ομοιόμορφα κατανεμημένο.

Η συνθήκη στο άπειρο είναι: $\lim_{x \to 0} \Phi(x) = 0$

Το δυναμικό είναι σφαιρικά συμμετρικό, άρα είναι συνάρτηση μόνο του $|x| = r$

Κατά συνέπεια, ο γενικός τύπος σε σφαιρικές συντεταγμένες

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{1}{r^2}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right\}$$

γίνεται: $\vec{\nabla}^2 = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{d}{dr}\right)$

Έτσι η διαφορική εξίσωση του Poisson γράφεται ως εξής:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\Phi}{dr}\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{όπου } \rho = \begin{cases} 0 & r > R \\ \frac{3}{4\pi}\frac{q}{R^3} & r < R \end{cases}$$

Η ολοκλήρωση των εξισώσεων δίνει

$$\Phi(x)=\begin{Bmatrix}\Phi_I(x)=D_I+\dfrac{C_I}{r}-\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{r^2}{2R^3},\ r<R\\ \Phi_{II}(x)=D_{II}+\dfrac{C_{II}}{r}\qquad\qquad r<R\end{Bmatrix}$$

Η συνθήκη στο άπειρο συνεπάγεται: $D_{II}=0$. Και το πεπερασμένο του δυναμικού στο μηδέν συνεπάγεται: $C_I=0$. Έχουμε λοιπόν:

$$\Phi_I(x)=D_I\ \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r^2}{2R^3}\quad \text{και}\quad \Phi_{II}(x)=\frac{c_{II}}{r}$$

Η συνέχεια του δυναμικού δίνει στο $r=R$: $r=R:\Phi_I(R)=\Phi_{II}(R)$

Άρα: $D_I-\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{2R}=\dfrac{C_{II}}{R}$

Η συνέχεια του ηλεκτρικού πεδίου δίνει στο $r=R$: $\left.\dfrac{d\Phi_I}{dr}\right|_{r=R}=\left.\dfrac{d\Phi_{II}}{dr}\right|_{r=R}$

Άρα: $\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{R^2}=\dfrac{C_{II}}{R^2}$

Κατά συνέπεια: $C_{II}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}$ και $D_I=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}.\dfrac{3}{2R}$

Άρα: $\Phi(x)=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{2R}\left[3-\left(\dfrac{r}{R}\right)^2\right]$ για $r\le R$ και $\Phi(x)=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r}$ για $r>R$