Περί γραμμικού τελεστή μετασχηματισμού Laplace

Ν. Λυγερός

Έστω μια συνάρτηση

$F(t)$ για $t > 0$
Ο ορισμός του μετασχηματισμού του Laplace είναι:

$$L\{F(t)\} = f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)dt$$

Ο τελεστής L είναι γραμμικός, διότι για κάθε ζεύγος σταθερών c_1, c_2 και ζεύγος συναρτήσεων $F_1(t)$ και $F_2(t)$ με μετασχηματισμούς του Laplace $f_1(s)$ και $f_2(s)$ έχουμε:

$$L\{c_1F_1(t) + c_2F_2(t)\} = c_1L\{F_1(t)\} + c_2L\{F_2(t)\} = c_1 f_1(s) + c_2 f_2(s)$$

Ο τελεστής $\mathcal{L}$ έχει δύο ιδιότητες μετάθεσης:

1. Εάν $L\{F(t)\} = f(s)$ τότε $L\{e^{at}F(t)\} = f(s-a)$
2. Εάν $L\{F(t)\} = f(s)$ και $G(t) = \begin{cases} F(t-a) & t > a \\ 0 & t < a \end{cases}$

Τότε $L\{G(t)\} = e^{-sa} f(s)$

Ο τελεστής $\mathcal{L}$ έχει επιπλέον την ιδιότητα κλίμακας, δηλαδή εάν $L\{F(t)\} = f(s)$ τότε $L\{F(ta)\} = \frac{1}{a} f\left(\frac{s}{a}\right)$

Μέσω των ολοκληρωμάτων και των παραγωγών μπορούμε ν' αντιληφθούμε πιο βαθιά τη δομή του γραμμικού τελεστή.

Εάν $L\{F(t)\} = f(s)$ τότε $L\{F'(t)\} = sf(s) - F(0)$

Όταν η $F(t)$ είναι συνεχής για $0 \le t \le N$ και εκθετικής τάξης για $t > N$, ενώ $F'(t)$ είναι τμηματικά συνεχής για $0 \le t \le N$.

Με ανάλογο τρόπο βρίσκουμε ότι:

$L\{F''(t)\} = s^2 f(s) - sF(0) - F'(0)$ και πιο γενικά ακόμα:

$$L\left\{F^n(t)\right\} = s^n f(s) - s^{n-1}F(0) - s^{n-2}F'(0) - .... - F^{(n-1)}(0)$$

Όσον αφορά στα ολοκληρώματα έχουμε:

Εάν $L\left\{F(t)\right\} = f(s)$ τότε $L\left\{\int_0^t F(u)du\right\} = \frac{f(s)}{s}$

Αυτή η ιδιότητα μπορεί να συνδεθεί με την εξής:

Εάν $L\left\{F(t)\right\} = f(s)$ τότε $L\left\{t^n F(t)\right\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} f(s) = (-1)^n f^{(n)}(s)$

Και για τις περιοδικές συναρτήσεις βρίσκουμε:

Εάν $F(t)$ έχει περίοδο $T > 0$ τέτοια ώστε $F(t+T) = F(t)$

Τότε $L\left\{F(t)\right\} = \frac{\int_0^T e^{-st}F(t)dt}{1-e^{-sT}}$

Ο μετασχηματισμός του Laplace αποτελεί γνωστικό πυρήνα για τις ειδικές συναρτήσεις, όπως το αποδεικνύουν τα επόμενα παραδείγματα.

- Η συνάρτηση $\Gamma(x) : \Gamma(x) = \int_0^\infty u^{x-1}e^{-u}du$
- Οι συναρτήσεις Bessel: $J_n(t) = \frac{t^n}{2^n\Gamma(n+1)}\left\{1 - \frac{t^2}{2(2n+2)} + ...\right\}$
- Η συνάρτηση σφάλματος: $erf(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-u^2}du$

Επιπλέον, δίνει μία υπόσταση, τουλάχιστον ως ένα τεχνικό όριο της συνάρτησης Dirac και της συνάρτησης Heaviside που πρέπει να ερμηνευτούν ως κατανομές της θεωρίας του Schwarz.