Η παγκοσμιότητα της κανονικής κατανομής

Ν. Λυγερός

Η παγκοσμιότητα της κανονικής κατανομής αναδεικνύεται με την ασυμπτοτική συμπεριφορά των άλλων κατανομών. Όταν οι δοκιμές μεγαλώνουν σε μέγεθος, είναι δυνατόν να χρησιμοποιήσουμε το νόμο των μεγάλων αριθμών:

Θεώρημα: $x_1, x_2, ..., x_n$ Έστω ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με πεπερασμένες μέση τιμή και διασπορά, έχουμε:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

Αυτό το αποτέλεσμα μπορεί να ερμηνευτεί ως μια συνέπεια της ανισότητας του Chebychev.

Θεώρημα: Έστω x μια τυχαία μεταβλητή με πεπερασμένες μέση τιμή και διασπορά σ^2 , τότε για κάθε θετικό αριθμό ε

$$P\left(|x-\mu| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

Αυτό μας οδηγεί και στην έρευνα του de Moivre, ο οποίος βρίσκει το 1730 ένα ασυμπτωτικό τύπο για την ειδική περίπτωση των δοκιμών του Bernoulli για $r = q = \frac{1}{2}$. Το αποτέλεσμά του γενικεύτηκε από τον Laplace για κάθε P διαφορετικό του 0 και 1.

Ας εξετάσουμε πρώτα το τοπικό θεώρημα, για να θέσουμε το πλαίσιο:

Θεώρημα: Εάν οι πιθανότητες $p_1, p_2, ..., p_k$ εμφάνισης των γεγονότων $A_1^{(s)}, A_2^{(s)}, ..., A_k^{(s)}$ στην (s) δοκιμή δεν εξαρτάται από τον αριθμό δοκιμών και είναι διαφορετικός του 0 και 1, τότε η πιθανότητα $P_n(m_1, m_2, ..., m_k)$ να εμφανιστούν m_i φορές τα γεγονότα A_i μέσα σε n ανεξάρτητες δοκιμές ακολουθεί την εξής ασυμπτοτική συμπεριφορά:

$$\sqrt{n^{k-1}} P_n(m_1, m_2, ..., m_k) : \frac{e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} q_i x_i^2}}{(2\pi)^{\frac{k-1}{2}} \sqrt{p_1, p_2, ..., p_k}} \to 1 (n \to \infty)$$

Αυτό το θεώρημα αποδεικνύεται κλασικά με τη χρήση του τύπου του Stirling. $n! \sim \left(\frac{n}{s}\right)^n \sqrt{2\pi n}.e^{\theta_n}$ *όπου* $|\theta_n| \leq \frac{1}{12n}$

Τώρα το θέτω

$$\sqrt{npq}P_n(m):\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{1}{2}x^2}\to 1(n\to\infty)$$

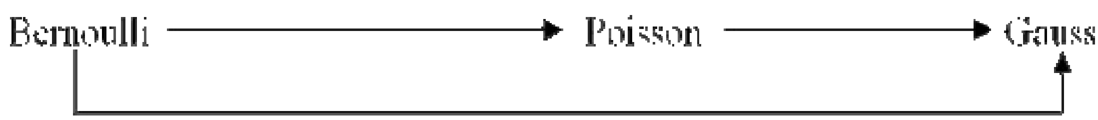
Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να συνδυάσουμε την κατανομή του Bernoulli αλλά και του Poisson με την κατανομή του Gauss. Στην πραγματικότητα, αυτή η μεθοδολογία ενισχύει την ιδέα ότι όντως ο de Moivre ήταν ο πρώτος που ανακάλυψε την κανονική κατανομή. Διότι μια απλή αλλαγή μεταβλητών και ένας ασυμπτοτικός υπολογισμός οδηγεί σε αυτό το αποτέλεσμα.

Πιο συγκεκριμένα ο τύπος $P(m)=\binom{n}{m}p^m(1-p)^{n-m}$ παίρνει την εξής μορφή στο άπειρο:

$P(m)=\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\frac{1}{\sqrt{p(1-p)}}e^{-\frac{\xi^2}{2np(1-p)}}$ όπου $m=np+\xi$ με $\xi\ll np$.Και αυτό το αποτέλεσμα μπορεί να γραφτεί ως εξής: $P(m)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}}$

Με άλλες συνθήκες είναι δυνατόν να συνδέσουμε την κατανομή του Bernoulli με την κατανομή του Poisson, διότι αν $m\le n$, η πιθανότητα $P(m)=\frac{n!}{m!(n-m)!}p^m(1-p)^{n-m}$ γίνεται $P(m)=\frac{a^m.e^a}{m!}$

Επιπλέον η ασυμπτοτική συμπεριφορά της κατανομής του Poisson οδηγεί στην κανονική κατανομή. Κατά συνέπεια, έχουμε το εξής διάγραμμα :



Όπου όλα τα βέλη λειτουργούν μέσω του τύπου του Stirling. Με άλλα λόγια η κανονική κατανομή λειτουργεί ως ελκυστής κατανομών. Αυτό το αποτέλεσμα της δίνει την ιδιότητα της παγκοσμιότητας, δίχως αυτό να σημαίνει ότι είναι απόλυτα.