# Κεντρικό δυναμικό και ενεργειακές στάθμες

Ν. Λυγερός

Έστω ένα σωμάτιο μάζας m που κινείται σε 3 διαστάσεις υπό την επήρεια κεντρικού δυναμικού. $V(r) = -\frac{e^2}{r} + \frac{h^2 g^2}{2mr^2}$

$(g \neq 0)$ που γενικεύει την αλληλεπίδραση Coulomb.

- Υπολογισμός των ενεργειακών στάθμων και του πλήθους των εκφυλισμένων καταστάσεων.

Το ενεργό δυναμικό του προβλήματος είναι το εξής.

$$V_{eff}(r) = -\frac{e^2}{r} + \frac{\hbar^2 g^2}{2mr^2} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}$$

$$V_{eff}(r) = -e^2 + \frac{\hbar^2 \tilde{l}(\tilde{l}+1)}{2mr^2}$$

Όπου: $\tilde{l} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 + g^2}$

$$\tilde{l}(\tilde{l}+1) = (l+1)l + g$$

Τότε: $N + \tilde{l} + 1 = n - \left(l + \frac{1}{2}\right) + \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 + g^2}$

Οπότε: $E_{n,l} = -\frac{me^4}{2\hbar^2} \frac{1}{\left[n - \left(l + \frac{1}{2}\right) + \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 + g^2}\right]}$

Όταν ξέρουμε ότι οι ενεργειακές στάθμες του ατόμου του υδρογόνου είναι

$E_n = -\frac{me^4}{2\hbar n^2}$ όπου $n = N + l = 1$ με N=0,1,2,… , l=0,1,2,… .

- *Αν η παράμετρος g είναι πολύ μικρή, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη θεωρία διαταραχών.*

*Για το άτομο του υδρογόνου ισχύει* $\left\langle \psi_{nlm} \left| \frac{1}{r^2} \right| \psi_{nl'm'} \right\rangle = \frac{\delta_{l,l'}\delta_{m,m'}}{a_0^2 n^3 \left(l + \frac{1}{2}\right)}$ *όπου* $a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2}$ *είναι η ακτίνα τουBohr.*

$$\left\langle \psi_{nlm} \left| \frac{\hbar g^2}{2mr^2} \right| \psi_{nl'm'} \right\rangle = \frac{\hbar g^2}{2m} \left\langle \psi_{nlm} \left| \frac{1}{r^2} \right| \psi_{nl'm'} \right\rangle$$

$$= \frac{\hbar g^2}{2m} \frac{\delta_{l,l'}\delta_{m,m'}}{a_0^2 n^3 \left(l + \frac{1}{2}\right)} = \frac{\hbar g^2}{2m} \frac{m^2 e^4}{\hbar^2} \frac{\delta_{l,l'}\delta_{m,m'}}{n^3 \left(l + \frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{me^4}{2\hbar} \cdot \frac{g^2}{n^3 \left(l + \frac{1}{2}\right)} \delta_{l,l'}\delta_{m,m'} . \text{Άρα:}\ E_{n,l} = -\frac{me^4}{2\hbar^2 n^2} + \frac{me^4}{2\hbar^2} \frac{g^2}{n^3 (l + \frac{1}{2})} + \mathrm{O}\left(g^4\right)$$