Η συμβολή του σπιν στην Κβαντική Μηχανική

Ν. Λυγερός

Η κβαντική ερμηνεία των αποτελεσμάτων του πειράματος Stern-Gerlach απαιτεί τις εξής ιδιότητες για το σπιν του ηλεκτρονίου.

- Το μέτρο του σπιν είναι σταθερό και ίσο με $\sqrt{3/4}\hbar$
- Η προβολή του διανύσματος του σπιν κατά μήκος οποιουδήποτε άξονα παίρνει δύο τιμές $\frac{\hbar}{2}$ και $-\frac{\hbar}{2}$
- Η γυρομαγνητική ανωμαλία του σπιν είναι $g_s = 2_{gl} = 2\frac{e}{2mc} = \frac{e}{mc}$

Η πλήρης κβαντομηχανική περιγραφή της κίνησης ενός σωματιδίου απαιτεί τη γνώση της πιθανότητας θέσης και των διαφόρων τιμών της προβολής του σπιν σε μία διεύθυνση. Κατά συνέπεια: $\psi = \psi\left(\vec{r}, \mu\right)$.

Άρα η πυκνότητα πιθανότητας εύρεσης σωματιδίου στο σημείο με διάνυσμα θέσης $\vec{r}$ με προβολή του σπιν μ είναι: $P(\vec{r}, \mu) = \psi\left(\vec{r}, \mu\right)$.

Ο διανυσματικός τελεστής του σπιν είναι $\vec{S} = \hat{S}_x\vec{i} + \hat{S}_y\vec{j} + \hat{S}_z\vec{k}$.

Ο τελεστής $\hat{S}_n$ της προβολής του σπιν κατά τη διεύθυνση ενός μοναδιαίου διανύσματος είναι $\hat{S}_n = \vec{n}.\vec{S} = n_x\hat{S}_x + n_y\hat{S}_y + n_z\hat{S}_z$.

Η μοναδική ιδιοτιμή του τελεστή $\hat{S}^2$ είναι $s\left(s+1\right)\hbar^2$ και οι ιδιοτιμές του τελεστή της z-συνιστώσας του σπιν $\hat{S}_z$ είναι $-s\hbar, -(s-1)\hbar, ..., 0, ...(s-1)\hbar, s\hbar$.

Έχουμε επιπλέον $\left[\hat{S}_i, \hat{S}_j\right] = i\hbar e_{ijk}\hat{S}_k$ ενώ οι τελεστές αναβίβασης και καταβίβασης ορίζονται ανάλογα με τους τελεστές τροχιακής στροφορμής $\hat{S}_+ = \hat{S}_x + i\hat{S}_y$ και $\hat{S}_- = \hat{S}_x - i\hat{S}_y$.

Η δράση των τελεστών $\hat{S}_+$ και $\hat{S}_-$ στην ίδια συνάρτηση Χμ του τελεστή $\hat{S}_z$ είναι:

$$\begin{cases} \hat{S}_+ X_\mu = C_+ X_{\mu+1} \\ \hat{S}_- X_\mu = C_- X_{\mu-1} \end{cases}$$

όπου $C_\pm = \sqrt{s\left(s+1\right) - \mu\left(\mu \pm 1\right)\hbar}$.

Η συμβολή του σπιν στην κβαντική μηχανική είναι καθοριστική όταν το σωμάτιο αλληλεπιδρά με το μαγνητικό πεδίο. Ενώ η τροχιακή κίνηση δεν επηρεάζει τον προσανατολισμό του σπιν.

Άρα ο τελεστής Hamilton έχει τη μορφή:

$$\hat{H} = \hat{H}(\vec{r}, \vec{p}) + \hat{H}(\vec{S})$$

όπου $\hat{H}\left(\vec{r},\vec{p}\right)$ είναι το χωρικό μέρος

και $\hat{H}\left(\vec{S}\right)$ είναι το σπιν μέρος.

Κατά συνέπεια, η κυματοσυνάρτηση έχει τη μορφή:

$\psi\left(\vec{r},\mu\right)=\psi\left(\vec{r}\right)X\left(\mu\right)$

Έτσι η πιθανότητα πυκνότητας γράφεται:

$P\left(\vec{r},\mu\right)=P\left(\vec{r}\right)P\left(\mu\right)$

Μία σημαντική επίπτωση αυτής της ιδιότητας είναι η εξής. Στην περίπτωση μιας αλληλεπίδρασης τροχιακής στροφορμής με σπιν, ο υπολογισμός ποσοτήτων που σχετίζονται μόνο με το σπιν μπορεί να γίνει με τη σπιν κυματοσυνάρτηση Χ(μ) και μόνο, διότι εμπεριέχει όλες τις χρήσιμες πληροφορίες της συνολικής κυματοσυνάρτησης $\psi\left(\vec{r},u\right)$. Με άλλα λόγια, η έννοια του σπιν είναι αναγκαία για την κβαντική θεώρηση των πραγμάτων.

Οι πίνακες των τελεστών των συνιστωσών του σπιν είναι:

$\hat{S}_x=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\hat{S}_y=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix},\hat{S}_z=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

Και οι πίνακες των τελεστών αναβίβασης και καταβίβασης:

$\hat{S}_+=\hbar\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ και $\hat{S}_-=\hbar\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

Μέσω των πινάκων του Pauli έχουμε:

$\hat{\sigma}_x=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\hat{\sigma}_y=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}$ και $\hat{\sigma}_z=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

$\left[\hat{\sigma}_i,\hat{\sigma}_j\right]=2ie_{ijk}\hat{\sigma}_k$ και $\hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_j+\hat{\sigma}_j\hat{\sigma}_i=2\delta_{ij}\hat{I}$

Έστω $\hat{\vec{\sigma}}=\hat{\sigma}_x\vec{i}+\hat{\sigma}_y\vec{j}+\hat{\sigma}_z\vec{k}$

βρίσκουμε: $\hat{\vec{S}}=\frac{\hbar}{2}\hat{\vec{\sigma}}$