Η συμβολή των κατανομών στην επίλυση διαφορικών εξισώσεων

Ν. Λυγερός

Η επίλυση διαφορικών εξισώσεων προσφέρει ένα πλαίσιο δημιουργικό για την επιλογή μαθηματικών εργαλείων. Αυτά τα εργαλεία δεν λειτουργούν μόνο ανταγωνιστικά όσον αφορά στη μεθοδολογία. Μπορούν κάλλιστα να μην καλύπτουν τα ίδια προβλήματα. Έτσι αν το ένα δεν προσφέρει λύσεις μιας μορφής, μπορεί το άλλο να προσφέρει αυτή τη δυνατότητα. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι οι διαφορικές εξισώσεις. Σε αυτό το πλαίσιο, η μέθοδος των δυναμοσειρών μπορεί να βρει μια λύση αλλά χωρίς να υπάρχει απαραίτητα κλειστή μορφή. Σε αυτήν την περίπτωση, θα προτιμήσουμε τη μέθοδο που χρησιμοποιεί την έννοια της συνάρτησης Green. Βέβαια, αυτή η μέθοδος ανήκει στα ανώτερα μαθηματικά, με την έννοια ότι εκμεταλλεύεται τη θεωρία του Laurent Schwartz. Οι κατανομές δεν είναι απλές συναρτήσεις αλλά γενικευμένες. Μας δίνουν τη δυνατότητα να δώσουμε νόημα και στην παράγωγο ασυνεχών συναρτήσεων, οι οποίες δεν υπάρχουν εξ ορισμού της κλασικής παραγώγου. Μια παραδειγματική περίπτωση είναι η συνάρτηση Heaviside που ορίζεται ως εξής:

$$\begin{cases} H(x)=0 & \gamma\iota\alpha \quad x<0 \\ H(x)=1 & \gamma\iota\alpha \quad x>0 \end{cases}$$

Αυτή η συνάρτηση είναι κλασική αλλά τείνει ασυνεχώς στο σημείο 0. Κατά συνέπεια, δεν ορίζεται παράγωγος σε αυτό το σημείο. Ενώ σε όλα τα άλλα, η παράγωγος είναι μηδενική, διότι η συνάρτηση είναι σταθερή. Ας θεωρήσουμε τώρα την κατανομή του Dirac που ορίζεται ως εξής:

$$\begin{cases} \delta(x)=\infty & \gamma\iota\alpha \quad x=0 \\ \delta(x)=0 & \gamma\iota\alpha \quad x\neq 0 \end{cases}$$

Έχει την ιδιότητα των κατανομών: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$. Βέβαια δεν είναι συνάρτηση, εφόσον απειρίζει

στο σημείο 0. Όμως η πανέμορφη ιδιότητα που έχει μας επιτρέπει να την ερμηνεύσουμε ως γενικευμένη παράγωγο της συνάρτησης Heaviside. Πιο συγκεκριμένα έχουμε:

$$H(x)^{\cdot} = H'(x) + \delta(x)$$

όπως $H'(x)=0$ βρίσκουμε πιο απλά: $H(x)^{\cdot} = \delta(x)$.

Σε γενικότερη περίπτωση έχουμε τον εξής τύπο:

$$F(x)^{\cdot} = F'(x) + \sum c_n \delta(x_n)$$

Όπου $F(x)^{\cdot}$ είναι η γενικευμένη παράγωγος,

$F'(x)$ είναι η κλασική παράγωγος

και $\delta(x_n)$ είναι η κατανομή Dirac στο σημείο x_n όπου x_n είναι τα σημεία ασυνέχειας της συνάρτησης $F(x)$.

Αυτό σημαίνει ότι όταν έχουμε μια διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης, όπως είναι η εξίσωση Schrödinger, οι λύσεις μέσω της συνάρτησης Green που ερμηνεύουν τη «συνάρτηση» Dirac ως μια σημειακή πηγή θα πρέπει να συγκολληθούν μέσω της τάξης του άλματος στα σημεία ασυνέχειας της αρχικής συνάρτησης. Αυτή η μεθοδολογία μέσω των γενικευμένων συναρτήσεων ξεφεύγει από τα στενά όρια των κλασικών συναρτήσεων και υπερπηδά μια ενδογενή δυσκολία. Η επίλυση των διαφορικών εξισώσεων γίνεται μέσω των κατανομών που δεν είναι συναρτήσεις. Έχουμε λοιπόν ένα παράδειγμα μη συμβατικής μεθοδολογίας που βρίσκει αποτελεσματικές λύσεις εκεί που οι κλασικές μέθοδοι φτάνουν στα όρια του. Η λειτουργία εκτός πλαισίου δεν είναι πάντα παράλογη.