Περί μετασχηματισμού Laplace των συναρτήσεων Bessel

Ν. Λυγερός

Ένα γενικό πρόβλημα που έχουμε στα μαθηματικά, είναι η εύρεση κλειστής μορφής ενός τύπου. Μία ειδική περίπτωση που παραμένει όμως γενική είναι όταν υπάρχει ένας αναδρομικός τύπος. Στη θεωρία ολοκληρωμάτων για τις γενικές συναρτήσεις, η γενική μεθοδολογία εκμεταλλεύεται τη μιγαδική ανάλυση. Και γι' αυτό το λόγο, ο Γάλλος μαθηματικός Jacques Hadamard (1865-1963) κι ο Βέλγος μαθηματικός Charles de la Vallée Poussin (1866-1962) μίλησαν για το εξής νοητικό σχήμα: το πιο σύντομο μονοπάτι στην πραγματική ανάλυση είναι εκείνο που περνά από τους μιγαδικούς αριθμούς. Αυτό το νοητικό σχήμα χρησιμοποίησαν για να αποδείξουν την ιδέα του Carl Friedrich Gauss (1777-1855) περί κατανομής των πρώτων αριθμών. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα της ισχύος των μιγαδικών ολοκληρωμάτων είναι ο μετασχηματισμός Laplace των συναρτήσεων Bessel.

Η ολοκληρωτική αναπαράσταση των συναρτήσεων Bessel είναι η εξής:

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi e^{-in\varphi + ix\sin\varphi} \quad \textit{για} \quad n = 0,1....$$

Κατά συνέπεια, η μορφή του μετασχηματισμού Laplace των συναρτήσεων Bessel είναι η επόμενη

$$F_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi e^{-in\varphi}\int_0^{\infty} dx e^{-(s-i\sin\varphi)x}$$

Όπως το δεύτερο ολοκλήρωμα είναι ανεξάρτητο και απλό έχουμε:

$$F_n(s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \frac{e^{-in\varphi}}{s - i\sin\varphi}$$

Για να αποφύγουμε το κλασσικό πρόβλημα της n- οστής τάξης πόλο στο $z = 0$ *δεν αλλάζουμε την μεταβλητή σε* $z = e^{i\varphi}$ *αλλά σε* $z = e^{-i\varphi}$ *.*

Συγκεκριμένα και αναλυτικά έχουμε:

- $dz = -ie^{-i\varphi}d\varphi = -izd\varphi \Leftrightarrow d\varphi = \frac{dz}{-iz} = i\frac{dz}{z}$
- $\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \Leftrightarrow \sin\varphi = \left(\frac{1}{z} - z\right)/2i$

- *Άρα:* $F_n(s)=\frac{1}{2\pi}\oint_c \frac{idz}{z}.\frac{z^n}{s-i\left(\frac{1}{z}-z\right)/2i}$

- *Δηλαδή:* $F_n(s)=\frac{i}{\pi}\oint_c \frac{z^n}{z^2+2sz-1}$

Όπου C είναι ο μοναδικός κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων. Όπως n είναι φυσικός δεν υπάρχουν διακλαδώσεις. Για να διαγράψουμε τον κύκλο με τριγωνομετρική φορά, ένα πρόσθετο μείον είναι απαραίτητο. Συνεπώς, έχουμε το εξής ολοκλήρωμα.

$$F_n(s)=-\frac{i}{\pi}\oint_c dz\frac{z^n}{z^2+2sz-1}$$

Υπάρχουν πόλοι, εφόσον $z^2+2sz-1=0$. *Είναι και οι δύο απλοί.*

Έστω $z_1=-s+\sqrt{s^2+1}$ *και* $z_2=-s-\sqrt{s^2+1}$.

Παρατηρούμε ότι μόνο ο πόλος z_1 *ανήκει στο δίσκο που ορίζει ο μοναδιαίος κύκλος, κατά συνέπεια το* z_2 *δεν έχει συνεισφορά στο ολοκλήρωμα.*

Μέσω της θεωρίας των μιγαδικών υπολοίπων έχουμε:

$$F_n(s)=2i\pi\,\mathrm{Res}\left(F_n\right)\Big|_{z=z_1}$$

Άρα $F_n(s)=2i\pi\lim_{z\to z_1}(z-z_1)F_n$

$$2i\pi\left(\frac{-i}{\pi}\right)\frac{\left(z-z_4\right)z_1^n}{\left(z-z_4\right)\left(z-z_2\right)}\Bigg|_{z=z_1}$$

Δηλαδή: $2\frac{z_1^n}{z_1-z_2}=\cancel{2}\frac{z_1^n}{\cancel{2}\sqrt{s^2+1}}$

Άρα τελικά βρίσκουμε: $F_n(s)=\frac{\left(\sqrt{s^2+1}-s\right)^n}{\sqrt{s^2+1}}$

Με προσθετική μορφή έχουμε:

$$F_n(s)=\frac{1}{\sqrt{s^2+1}\left(\sqrt{s^2+1}+s\right)^n}$$