Μεθοδολογία του Fejér και σχέση με τον Καραθεοδωρή

Ν. Λυγερός

Για να κατανοήσουμε καλύτερα το έργο του Κωνσταντίνου Καραθεοδωρή, είναι καλό να ξέρουμε και το έργο των συνεργατών του. Διότι είναι ο συνδυασμός των δύο που έφερε στο φως το αποτέλεσμα που μελετάμε. Ένας από τους συνεργάτες του Κωνσταντίνου Καραθεοδωρή ήταν ο Ούγγρος μαθηματικός Lipót Fejér (1880-1959). Μια από τις ειδικότητές του στα μαθηματικά ήταν η μελέτη των σχέσεων μεταξύ τριγωνομετρικών αθροισμάτων και σειρών του Γάλλου μαθηματικού Joseph Fourier (1768-1830). Ένας τρόπος για να εξοικειωθούμε με το έργο του είναι η μελέτη της εφαρμογής της μεθοδολογίας του Gauss, όσον αφορά το άθροισμα μιας αριθμητικής σειράς, στις τριγωνομετρικές σειρές.
Ο Gauss για να υπολογίσει το εξής άθροισμα $1+2+3....+n$ έκανε:

$$S=1+2+3....+n$$
$$S=n+n-1+....+1$$

$$\underbrace{2S=(n+1)+(n+1)+...+(n+1)}_{n \quad \varphi o\rho \varepsilon \varsigma}$$

Άρα: $S=n(n+1)/2$

Έστω τώρα: $\sin\alpha+\sin\alpha+\sin 3\alpha+...\sin n\alpha=\dfrac{\sin n\alpha/2.\sin(n+1)\alpha/2}{\sin\alpha/2}$

Δίχως να χρησιμοποιήσουμε τη μιγαδική εκθετική συνάρτηση, βρίσκουμε το εξής.

$$S=\sin\alpha+\sin 2\alpha+....+\sin n\alpha$$
$$S=\sin n\alpha+\sin(n-1)\alpha+....+\sin\alpha$$

Μέσω του τύπου:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin(\alpha+\beta)/2.\cos(\alpha-\beta)/2$$

$$\begin{aligned}2S=2[&\sin(1+n)a/2.\cos(1-n)a/2\\&+\sin(1+n)a/2\cos(3-n)a/2+...+\sin(n+1)a/2\cos(n-1)a/2]\end{aligned}$$

$$2S=2\sin(n+1)a/2[\cos(1-n)a/2+\cos(3-n)a/2+....+\cos(n-1)a/2]$$

Μέσω του τύπου:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right]$$

$$2S\sin\alpha/2 = \sin(n+1)\alpha/2.[\sin n\alpha/2+...+\sin n\alpha/2]$$

Άρα: $2S\sin\alpha/2 = 2\sin(n+1)\alpha/2\sin n\alpha/2$

Αυτές οι απλές τεχνικές ήταν μία από τις αποτελεσματικές ειδικότητες του Fejér και ήταν πολύ χρήσιμη στο πλαίσιο της συνεργασίας του με τον Καραθεοδωρή.