Schémas mentaux du problème symétrique de Niels Abel

N. Lygeros

Problème : Trouver la forme générale des fonctions f telles que $f(z, f(x, y))$ soit une fonction symétrique de z, x et y.

Conditions initiales :

$$f(z, f(x,y)) = f(z, f(y,x))$$
$$f(z, f(x,y)) = f(x, f(z,y))$$
$$f(z, f(x,y)) = f(x, f(y,z))$$
$$f(z, f(x,y)) = f(y, f(x,z))$$
$$f(z, f(x,y)) = f(y, f(z,x))$$

De l'équation

$$f(z, f(x,y)) = f(z, f(y,x))$$

nous déduisons que

$$f(x,y) = f(y,x).$$

Ainsi les conditions initiales deviennent :

$$f(z, f(x,y)) = f(x, f(y,z)) \quad f(z, f(x,y)) = f(y, f(z,x))$$

En notant $f(x,y) = r$, $f(y,z) = v$ et $f(z,x) = s$, nous avons:

$$f(z,r) = f(x,v) = f(y,s)$$

Différentiations :

$$f'(r).\left(\frac{dr}{dx}\right) = f'(s).\left(\frac{ds}{dx}\right)$$
$$f'(v).\left(\frac{dv}{dy}\right) = f'(r).\left(\frac{dr}{dy}\right)$$
$$f'(s).\left(\frac{ds}{dz}\right) = f'(v).\left(\frac{dv}{dz}\right)$$

Nous en déduisons :

$$\left(\frac{dr}{dx}\right)\left(\frac{dv}{dy}\right)\left(\frac{ds}{dz}\right)=\left(\frac{dr}{dy}\right).\left(\frac{dv}{dz}\right).\left(\frac{ds}{dx}\right)$$

Ou de manière équivalente :

$$\left(\frac{dr}{dx}\right)\left(\frac{\frac{dv}{dy}}{\frac{dv}{dz}}\right)=\left(\frac{dr}{dy}\right).\left(\frac{\frac{ds}{dx}}{\frac{ds}{dz}}\right)$$

<u>Invariance :</u> Si z est fixe alors $\left(\frac{dv}{dy}\right):\left(\frac{dv}{dz}\right)$ est une fonction de y.

Comme $\left(\frac{ds}{dx}\right):\left(\frac{ds}{dz}\right)=\varphi(x)$ nous avons : $\left(\frac{dr}{dx}\right)\varphi(y)=\left(\frac{dr}{dy}\right)\varphi(x)$

Nous en déduisons : $r=\psi\left[\int\varphi(x)dx+\int\varphi(y)dy\right]$ où ψ fonction arbitraire

<u>Abréviation d'Abel</u> : $\varphi x:=\int\varphi(x)dx$ et $\varphi y:=\int\varphi(y)dy$

Aussi : $r=\psi(\varphi x+\varphi y)=f(x,y)$

Comme $f(z,f(x,y))$ doit être symétrique par rapport à x,y et z, nous avons

$\varphi z+\varphi\psi(\varphi x+\varphi y)=\varphi x+\varphi\psi(\varphi y+\varphi z)$ d'où $\varphi z=0=\varphi y$

En posant : $\varphi x=p$, on a : $\varphi\psi(p)=p+c$. Soit φ_1 la fonction inverse de φ, on a $\psi(p)=\varphi_1(p+c)$ et donc : $f(x,y)=\varphi_1(c+\varphi x+\varphi y)$.