Masses variables et systèmes dynamiques

L. Casetta – N. Lygeros

C'est au mathématicien et inventeur tchèque von Buquoy (1781-1851) que nous devons la première étude des masses variables. Son premier traité s'intitule : *Analytische Bestimmung des Gesetzes der virtuellen Geschwindigkeiten in mechanischer and statischer Hinsicht*. Le second qui représente la suite, au sens du prolongement du précédent s'intitule *: Weitere Entwickelung und Anwendung des Gesetzes der virtuellen Geschwindigkeiten in mechanischer and statischer Hinsicht*. Les deux livres ont été publiés par Breitkopf & Härtel à Leipzig respectivement en 1812 et 1814. Il a par la suite publié en 1815 un article à l'Institut de France dont le titre est : *Exposition d'un nouveau principe général de Dynamique* dont le principe des vitesses virtuelles n'est qu'un cas particulier. Aussi il est possible de mettre en évidence un lien avec les travaux du mathématicien français Poisson (1781-1840) qui a fait paraître un article intitulé : *Sur le mouvement d'un système de corps en supposant les masses variables* dans le Bulletin scientifique de la Société Philomathique en avril 1819. Ces travaux ont été par la suite mis à l'écart par l'effet de mode, mais aussi par désir de simplicité, au point qu'ils ont fini par être oubliés. Ce n'est que plus tard qu'une partie de ceux-ci ont été retrouvés par l'étudiant de Chebyshev (1821-1894) à savoir Meshchersky (1859-1935) à partir de 1893 où il a présenté ses travaux de recherche au congrès de la société mathématique de Saint-Pétersbourg. Par la suite, il a publié en 1892 son œuvre : *La dynamique d'un point à masse variable*. Il a, entre autres, utilisé cette théorie pour calculer la modification des trajectoires des comètes via la perte de masse. Ainsi il a donné une forme plus générale à la loi de Newton :

$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{\phi} = \vec{F} + \frac{dm}{dt}\vec{u}_{rel}$ où $\vec{u}_{rel} = \vec{u} - \vec{v}$

ou de manière équivalente $\vec{F} + \frac{dm}{dt}\vec{u} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$

qui inclue évidemment la formule $\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$ lorsque $\vec{u} = \vec{0}$

Dans ce nouveau cadre, si nous examinons le formalisme lagrangien nous avons, d'après les résultats de Pesce :

$Q_j = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j}$ avec $Q_j = \sum_j \vec{F}_i \frac{\partial P_i}{\partial q_j}$

$$\begin{cases} si \;\; m = m(t) \;\; alors \;\; Q_j = \sum_i \left(\vec{F}_i + \dot{m}_i \vec{u} \right) . \dfrac{\partial P_i}{\partial q_j} \\ si \;\; m_i = m_i(q_j, t) \;\; alors \;\; Q_j = \sum_i \left(\vec{F}_i + \dot{m}_i \vec{u}_i \right) . \dfrac{\partial P_i}{\partial q_j} - \dfrac{1}{2} \sum_i \dfrac{\partial m_i}{\partial q_j} \left(v_i \right)^2 \\ si \;\; m_i = m_i(q_j, \dot{q}_j, t) \; alors \;\; Q_j = \sum_i \left(\vec{F}_i + \dot{m}_i \vec{u}_i \right) . \dfrac{\partial P_i}{\partial q_j} + \dfrac{1}{2} \sum_i \left\{ \dfrac{d}{dt} \left(\dfrac{\partial m_i}{\partial \dot{q}_j} (v_i)^2 \right) - \dfrac{\partial m_i}{\partial q_j} \left(v_i \right)^2 \right\} \end{cases}$$

Cela revient à dire que le principe d'invariance est conservé dans le formalisme lagrangien à condition de généraliser les forces classiques. Telle est l'innovation de cette approche.