Ιστορική προσέγγιση της θεωρίας του Galois. Approche historique de la théorie de Galois.

Θα ασχοληθούμε με τη Θεωρία Ομάδων. Όμως, το να ασχοληθούμε απλώς και μόνο τυπικά με τη Θεωρία Ομάδων δεν αρκεί. Ένα πράγμα που θέλω να μελετήσουμε μαζί είναι να πάρουμε το χειρόγραφο του Galois, το οποίο είναι στα γαλλικά, να το κοιτάξουμε και να προσπαθήσουμε να σκεφτούμε τι θα κάναμε αν εμείς ήμασταν στα 1832 και έπεφτε στα χέρια μας. Θα μου πείτε γιατί επιλέγω αυτή τη μέθοδο. Είναι πολύ απλό. Πριν το 1832, δεν υπάρχει Θεωρία Ομάδων. Εσείς δεν είστε ειδικοί της Θεωρίας Ομάδων, άρα είναι πολύ εύκολο για σας να σκεφτείτε όχι πώς είναι τα πράγματα το 2008, γιατί έχουνε γίνει εν τω μεταξύ πολλές μελέτες, αλλά τότε. Εσείς έχετε προετοιμαστεί μέσω του μαθήματος Ιστορία και Φιλοσοφία των Μαθηματικών, στο πώς ανακαλύπτουμε μερικά πράγματα.

Βρισκόμαστε στη Γαλλία. Ο Évariste Galois έζησε την περίοδο 1811-1832. Νομίζω ότι θα ήταν καλό να διαβάσετε το βιβλίο «Ένας μεγάλος μαθηματικός» που είναι αφιερωμένο στον Évariste Galois. Υπάρχει και το «Ο Évariste Galois και το κλειδί της συμμετρίας», αλλά είναι πιο τεχνικό. Καλύτερα να αρχίσουμε με το άλλο. Θέλω σε αυτό το μάθημα της Θεωρίας Ομάδων να διαβάσετε αυτό το βιβλίο. Θα σας βοηθήσει σε όλο το πλαίσιο. Το διαβάζετε, σημειώνετε ότι δεν καταλαβαίνετε και το εξηγούμε μαζί.

Είμαστε λοιπόν στη Γαλλία και έχουμε έναν μαθηματικό νέο που ασχολείται με ένα θέμα το οποίο θα είναι η Θεωρία Ομάδων. Αν διαβάζατε την τελευταία επιστολή -στη Γαλλία το λέμε testament, δηλαδή διαθήκη- θα ήθελα να σκεφτείτε, όχι σαν φαντασίωση αλλά σαν κάτι πραγματικό, ότι ο Galois μας άφησε τη διαθήκη του. Μόνο σε μας. Και ξέρουμε ότι αν εμείς δεν κάνουμε τίποτα, δεν θα ξέρει κανείς μετά από εμάς τίποτα. Τόσο απλά. Μη μου πείτε ότι το πλαίσιο δεν είναι ξεκάθαρο! Αυτή η διαθήκη είναι απλώς μερικές σελίδες. Να ξέρετε ότι όταν μιλάμε για το συνολικό έργο του Galois δεν ξεπερνά τις 50 σελίδες. Όταν θα διαβάζετε τη διαθήκη μπορεί να σας συγκινήσει η ιδέα ότι γράφτηκε λίγο πριν πεθάνει. Το ξέρουμε αυτό από το γράμμα. Αλλά ξέρουμε ότι την επόμενη μέρα θα πεθάνει σε μία τεχνητή μονομαχία, όπως σας έχει παρουσιαστεί σε άλλη εργασία. Αυτό σας συγκινεί απλώς επειδή η κοινωνία σάς λέει ότι πρέπει να συγκινηθείτε όταν κάποιος γράφει κάτι και πεθαίνει την επόμενη μέρα. Αλλά δεν σας συγκινεί πραγματικά με την ανθρώπινη έννοια. Μέσα στη διαθήκη θα δούμε ότι πολλές φορές ο Galois γράφει: «Αυτό δεν ξέρω να το κάνω». Θα κάνει καλό σε σας που θεωρείτε ότι όταν κάνεις μαθηματικά πρέπει να τα ξέρεις όλα. Θα δείτε εδώ ότι μία από τις μεγαλύτερες διάνοιες των μαθηματικών είχε τη δύναμη να πει: «Αυτό το κάνω, αυτό δεν ξέρω να το κάνω, αυτό το προσπάθησα αλλά δεν το κατάφερα». Γιατί δεν μπορεί να πει ψέματα. Εσείς μπορείτε να πείτε μεταξύ σας ψέματα ότι καταφέρατε κάτι. Αλλά εσείς ξέρετε ότι δεν θα πεθάνετε την επόμενη μέρα και την επόμενη μέρα μπορείτε να πείτε ότι κάνατε αστείο. Πώς να μας αγγίξει ένας άνθρωπος που δεν μπορούσε να κάνει αστεία;

Το ερώτημά μας είναι το εξής. Σε ποιον απευθύνεται ο Galois όταν γράφει τη διαθήκη; Απευθύνεται μόνο και μόνο στην ανθρωπότητα. Δεν απευθύνεται στην κοινωνία, δεν απευθύνεται μόνο στο φίλο του τον Chevalier. Αλλά θέλει να κάνει ένα

έργο για την ανθρωπότητα. Δεν θα καταφέρει να ζήσει περισσότερο και τι γίνεται; Λέει: «Αυτό κατάφερα, αυτό έκανα, δεν μπόρεσα περισσότερο, αλλά ελπίζω κάποιος να το χρησιμοποιήσει». Ποιο είναι το νοητικό σχήμα που θέλω να αναδείξω; Αν διαβάζατε το έργο *Περιμένοντας τον Γκοντό* -όσοι δεν το έχετε κάνει, θα έχετε και αυτό το βιβλίο να διαβάσετε, είναι του Samuel Beckett, ο οποίος πήρε βραβείο Νόμπελ λογοτεχνίας- θα βλέπατε μία πάρα πολύ ωραία σκηνή. Οι δύο ήρωες, ο Vladimir και ο Estragon, είναι δύο φίλοι που βρίσκονται σε μία δύσκολη κατάσταση. (Το έργο *Alter Ego* είναι μία μελέτη πάνω σε αυτό θέμα). Αυτοί οι δύο φίλοι πρέπει να αντιμετωπίσουν κάποιον ο οποίος τους τρομάζει και τους φοβίζει. Αυτός κάποια στιγμή πέφτει. Είναι πεσμένος, ζητά βοήθεια και οι δύο ήρωες είναι εκεί κοντά και κοιτάζουν. Μιλάνε μεταξύ τους αλλά δεν μπορούν να τον βοηθήσουν κατευθείαν, γιατί αυτός τους έχει χτυπήσει. Όμως κάποια φάση, οι δύο φίλοι λένε κάτι που είναι πολύ σημαντικό: «Εδώ σ' αυτόν το χώρο, η ανθρωπότητα είναι μόνο εμείς οι δύο. Αν δεν τον βοηθήσουμε εμείς, δεν θα τον βοηθήσει η ανθρωπότητα». Αυτό που θέλω από εσάς για το συγκεκριμένο μάθημα, είναι να σκεφτείτε ότι αποτελείτε μια ομάδα από ανθρώπους, που αν δεν βοηθήσουμε εμείς στο έργο του Galois, το έργο του θα χαθεί.

Θα πρέπει να μάθουμε κάποια πράγματα περισσότερα για τον Galois. Μας άγγιξε λίγο ο Γιάννης με αυτά που μας είχε πει την πρώτη φορά. Μπορεί να μας έμαθε η προηγούμενη εργασία να τον αγαπήσουμε, αλλά δεν μας έμαθε ακόμα να τον καταλάβουμε. Είναι δύσκολο να αγαπήσεις πραγματικά κάποιον που δεν καταλαβαίνεις. Μπορεί να σε αγγίζει, να σε πληγώνει, αλλά όταν έρχεται η κατανόηση, μετά έρχεται και η επινόηση.

Άρα ο Galois μέσα σε αυτή τη διαθήκη ασχολείται με ένα πρόβλημα που απασχολεί την ανθρωπότητα εδώ και πάρα πολύ καιρό, κι αυτό θα μας επιτρέψει να μιλήσουμε και για έναν άλλο μαθηματικό, τον Niels Abel (1802-1829). Θέλω να κάνετε μία σοβαρή εργασία πάνω σε αυτό το θέμα, όπου η περίληψη της εργασίας είναι ό,τι θα γράφατε σε μία εγκυκλοπαίδεια γι' αυτούς τους ανθρώπους.

Αυτό είναι ένα άλλο σχήμα που θέλω να έχετε: Οι Εγκυκλοπαιδιστές. Εγκυκλοπαιδιστές είναι μια κατηγορία Γάλλων στοχαστών που δημιούργησαν την περίφημη Εγκυκλοπαίδεια. Στους Εγκυκλοπαιδιστές έχουμε τον Denis Diderot και τον Jean d'Alembert. Είναι οι δύο μεγάλοι υπεύθυνοι για την Εγκυκλοπαίδεια. Χρονικά δεν είμαστε ακόμα στην εποχή της γαλλικής επανάστασης, αλλά λίγο πριν. Η Εγκυκλοπαίδεια όπως θα καταλάβουμε, θα βοηθήσει πάρα πολύ τη νοητική προετοιμασία της γαλλικής επανάστασης. Άρα η ιδέα είναι, να γίνει κάτι σαν λεξικό, αλλά θέλουμε μέσα σε αυτό να βάλουμε όλες τις γνώσεις εκείνης της εποχής και να ρωτήσουμε ειδικούς. Είναι η πρώτη φορά που σκεφτόμαστε κάτι τέτοιο. Και για να καταλάβετε πόσο σημαντικό είναι, για θέματα φιλοσοφίας απευθύνθηκαν στο Βολταίρο. Τα θέματα που αφορούσαν στα μαθηματικά τα έκανε ο d'Alembert, ο οποίος έχει επινοήσει το θεώρημα d'Alembert-Gauss. Φιλοσοφία έχει κάνει και ο Diderot, ο οποίος έκανε και θέατρο. Είχαμε τεχνικές και μηχανικές γνώσεις και αυτή η Εγκυκλοπαίδεια, σας πληροφορώ, επανεκδόθηκε σε βιβλιαράκια πριν μερικά χρόνια στη Γαλλία, και είναι η πρώτη φορά που έχουμε επιστημονικές εικόνες. Άρα έχουμε και το εικονικό και το λεκτικό επίπεδο της γνώσης. Γι' αυτούς που έχουν τουλάχιστον λίγες γνώσεις στα γαλλικά, είναι όπως είναι το Petit Larousse. Σας το συνιστώ γιατί είναι προσβάσιμο. (Προσωπικά προτιμώ το Petit Robert). Νομίζω ότι θα ήταν καλό να το έχετε, γιατί θα διαβάσουμε μερικά κείμενα του Galois και θα

ήθελα όχι να παίξουμε, αλλά πραγματικά να προσπαθούμε να διαβάσουμε το κείμενο και να καταλάβουμε μερικές έννοιες, οι οποίες είναι πολύ σημαντικές. Γι' αυτούς που παρακολούθησαν ήδη το μάθημα Θεωρία Ομάδων, σκεφτήκατε γιατί δεν επιλέχθηκαν οι λέξεις πιο πριν; Εδώ σας φαίνεται εντελώς αυτονόητο να χρησιμοποιούνται αυτές οι λέξεις. Δεν ήταν τόσο αυτονόητο. Εκείνη την εποχή ο Galois θα χρησιμοποιήσει πιο πολύ τον όρο «ομαδοποιούμε» (=grouper). Είναι παράξενο, αν το σκεφτείτε, ακόμα και για Έλληνες. Μέσα στον όρο «ομαδοποιώ», νιώθετε ότι υπάρχει η λέξη «ομάδα». Το «ομαδοποιώ» υπονοεί ότι την έχετε σκεφτεί ήδη αυτή τη λέξη. Άμα σας πω εγώ ότι ο Galois που είναι ο πατέρας της Θεωρίας Ομάδων χρησιμοποιεί πιο πολύ αυτό, σημαίνει ότι η έννοια της ομάδας δεν έχει γεννηθεί ακόμα, και λέμε απλώς κάνουμε μια συλλογή, βάζουμε μαζί. Όταν λέμε ότι βάζουμε μαζί 11 άτομα, δεν σημαίνει αναγκαστικά ότι εννοούμε ομάδα ποδοσφαίρου. Μόνο που αν σας το γράψει αυτό ο Otto Rehagel (ειδικός του χώρου) και μιλάει για 11 άτομα που έβαλε μαζί, εσείς ξέρετε τι εννοεί γιατί τον έχετε δει. Αλλά εσείς τώρα δεν τον έχετε δει, δεν ξέρετε ποιος είναι αυτός ο Galois. Δεν ξέρετε όλα τα υπονοούμενα.

Η ιδέα της Εγκυκλοπαίδειας χρησιμοποιείται στο Larousse. Είναι το μόνο από τα δύο λεξικά που χρησιμοποιεί εικόνες. Κατά συνέπεια, για ανθρώπους που δεν κατέχουν πολύ καλά τα γαλλικά, αντί να έχετε πέντε γραμμές να σου περιγράφουν το αντικείμενο, καλύτερα να έχετε την εικόνα που σας βοηθά να καταλάβετε τις πέντε γραμμές. Αλλά, το Petit Larousse έχει 80.000 λέξεις ενώ το Petit Robert έχει 60.000. Αυτό σημαίνει ότι οι περιγραφές είναι πιο αναλυτικές. Στο Petit Robert υπάρχουν φράσεις μεγάλων λογοτεχνών της Γαλλίας στις οποίες χρησιμοποιείται η λέξη την οποία κοιτάτε. Αν, για παράδειγμα, στα μαθηματικά είχαμε τη λέξη «ομάδα», θα είχαμε μια φράση του Galois που την χρησιμοποιούσε.

Γιατί αναφέρομαι σε αυτό το πλαίσιο; Θέλω απλώς να δούμε τι μπορούμε να κάνουμε όταν δεν ξέρουμε τι να κάνουμε. Είναι ένα γενικό νοητικό σχήμα. Ας αρχίσουμε με μία εξίσωση πρώτου βαθμού. Προσέξτε, όμως. Θα εξετάζουμε όλα αυτά τα απλά πράγματα με ένα άλλο βλέμμα. Για να μπορέσουμε να προετοιμαστούμε. Αυτό που κάνω τώρα το έχει κάνει και ο Galois για να εξηγήσει το πλαίσιο της διαθήκης του.

Μία γενική **εξίσωση πρώτου βαθμού** είναι αυτή: $ax + b = c$. Υπονοώ βέβαια ότι a,b,c είναι σταθερές και x η μεταβλητή. Θα θεωρήσουμε ότι υπάρχει λύση όταν: $a \neq 0$. Αυτό είναι μια μικρή λεπτομέρεια αλλά είναι βασική, γιατί μετά θα διαιρέσουμε.

Ας πούμε ότι έχω μόνο αυτό: $AX = B$

Αν σκεφτόσασταν με τον ίδιο τρόπο, θα λέγατε απλώς ότι η λύση είναι $X = \frac{B}{A}$. Άρα αυτό μπορούμε να το γράψουμε λίγο διαφορετικά για να σας θυμίσει λίγο καλύτερα

τι εννοώ: $X = A^{-1}B$. Και αν θυμάστε καλά τώρα, υπονοώ ότι πρέπει να βρω τον αντίστροφο ενός πίνακα για να βρω τι κάνει το άγνωστο διάνυσμα σε σχέση με ένα σταθερό διάνυσμα. Αλλά δεν έχει νόημα αν δεν ορίσω ότι μιλάω για ΠΙΝΑΚΕΣ. Μη θεωρείτε ότι είναι αυτονόητο αυτό. Διότι, εδώ θυμάστε το πρόβλημα; έχετε να λέτε ότι εφόσον $A \neq 0$ όλα είναι καλά. Όμως, μπορεί να μην είναι όλα καλά, γιατί μπορεί $A \neq 0$ αλλά να έχει ορίζουσα ίση με 0. Δεν υπάρχει πίνακας που να είναι $\neq 0$ και η ορίζουσά του να είναι 0; Βέβαια υπάρχει:

$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Άρα έχουμε αμέσως ένα παράδειγμα που αμέσως αντικρούει αυτό που απλοϊκά θα λέγατε σε ένα παιδί: αν είναι $\boldsymbol{a \neq 0}$ **,** όλα καλά. Πρέπει να είστε προσεκτικοί, γιατί μπορεί να μην αρκεί πάντα να λέτε μόνο αυτό.

Επανέρχομαι, λοιπόν, στην εξίσωση πρώτου βαθμού. Η λύση είναι: $x = \frac{c-b}{a}$.

Ας κοιτάξουμε τώρα τι γίνεται με εξίσωση δευτέρου βαθμού. Θα μου πείτε: «Γιατί μας δείξατε την εξίσωση πρώτου βαθμού; Μόνο και μόνο για να μας δείξετε αυτό;» Για όσους καταλαβαίνουν τι γίνεται με τη Θεωρία Ομάδων, αν έχουμε μόνο ένα στοιχείο σε μία ομάδα (τετριμμένη), σημαίνει ότι είναι το ουδέτερο στοιχείο. Άρα είναι δύσκολο να δούμε τι συμβαίνει, διότι δεν γίνεται τίποτα, τουλάχιστον φαινομενικά. Άρα, ας κοιτάξουμε τώρα την εξίσωση δευτέρου βαθμού.

$ax^2 + bx + c = 0$. Το κλασικό που ξέρετε είναι το Δ και το $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$. Αυτό, βέβαια, είναι μία παπαγαλία. Αν αυτό σας ζητούσα να το αποδείξετε, τι θα κάνατε; Έχω δύο ερωτήσεις και είναι βασικό να τις καταλάβουμε. Η πρώτη είναι, πώς βρήκαμε το $x_{1,2}$ και η δεύτερη είναι, γιατί το $x_{1,2}$ είναι οι λύσεις. Εννοώ, ότι η πρώτη ερώτηση είναι η επίλυση. Η δεύτερη ερώτηση είναι η απόδειξη. Αν σας ζητήσω να μου αποδείξετε ότι $x_{1,2}$ είναι οι λύσεις είναι πολύ απλό. Το εφαρμόζετε και το αποδεικνύετε. Κάνετε έναν υπολογισμό. Αυτός ο υπολογισμός γίνεται διότι ξέρετε ήδη το αποτέλεσμα. Αυτή είναι η σημαντική πληροφορία. Στην επίλυση, δεν ξέρεις ποιο είναι το αποτέλεσμα. Στην απόδειξη, το γνωρίζεις. Άρα είναι απλώς επιβεβαίωση. Αν θέλετε, στην επίλυση έχουμε την ανακάλυψη ενώ στην απόδειξη έχουμε την αποκάλυψη. Στο δεύτερο, σας δίνω μια πληροφορία και εσείς την αποκαλύπτετε ή δεν σας δίνω τίποτα και εσείς πρέπει να τη βρείτε. Βλέπετε το νοητικό σχήμα; Δηλαδή, αν σας πω να πάρετε ένα τετράγωνο και να το κόψετε σε 5 μέρη ώστε να κάνετε ένα μικρό και ένα μεγαλύτερο τετράγωνο, πρέπει να το βρείτε. Αν σας δείξω μία λύση και σας πω να αποδείξετε ότι αυτό είναι λύση στο πρόβλημα, θα πάρετε τα 5 κομμάτια και θα τα βάλετε με τέτοιο τρόπο ώστε να αποδειχθεί αυτό που σας ζήτησα. Άρα το δεύτερο είναι πολύ πιο εύκολο. Αυτό που συνήθως κάνετε εσείς στα παιδαγωγικά, είναι ότι μπερδεύεστε και κάνοντας το μάθημα στα παιδιά,

τους δείχνετε τι είναι και μετά ζητάτε να σας το αποδείξουν. Όταν το κάνουν, θεωρείτε ότι το κατάλαβαν.

Η επίλυση μπορεί να είναι εντελώς τυχαία. Θα σας δώσω ένα παράδειγμα που μ' αρέσει πολύ. Ένας μεγάλος μαθηματικός έλυνε ένα πρόβλημα ίδιου τύπου με αυτό που σας είπα με το τετράγωνο. Δεν σας λέω ποιος ήταν για να ψάξετε να τον βρείτε. Δεν τον γνωρίζετε. Ήταν ένα πρόβλημα του τύπου σε ένα πλαίσιο έπρεπε να βάλει διάφορα πράγματα που μοιάζει, αν θέλετε, με ένα puzzle. Φεύγει, λοιπόν, για το εργαστήριό του και μπαίνει η μητέρα του στο δωμάτιο να συγυρίσει το γραφείο του. Και τυχαία πέφτει αυτό το πράγμα! Άντε να το βάλει τώρα! Ξέχασα να σας πω ότι αυτός είχε μήνες που προσπαθούσε να το λύσει αυτό το πρόβλημα. Και η μάνα του το ξαναφτιάχνει, αλλά βρίσκει άλλη λύση. Τυχαία! Η μάνα δεν ξέρει ότι αυτό είναι δύσκολο και βρίσκει μια λύση. Επιστρέφει ο μαθηματικός σπίτι του το βράδυ και βλέπει ότι αυτό που είχε κάνει δεν ήταν αυτό που είχε μπροστά του. Γιατί αυτός θυμόταν τι είχε βρει. Ένας μαθηματικός, λοιπόν, που παιδεύεται εδώ και μήνες για να βρει μία λύση, αντιλαμβάνεται ότι η μάνα του για να μη δείξει στο γιο της ότι τα είχε χαλάσει, βρήκε μία άλλη λύση. Τι έχετε να πείτε; Είναι εντελώς ελεύθερο. Και όχι μόνο μπορεί να γίνει, αλλά υπάρχει. Μάλιστα, το περιστατικό αυτό είναι γραμμένο και στο Λεξικό των Αριθμών του François Le Lionnais. Επιπλέον, αν ξέρατε και ποιο είναι το πρόβλημα θα καταλαβαίνατε ότι είναι πολύ δύσκολο να το λύσετε. Τελικά μια γυναίκα τι μπορεί να κάνει με το καθάρισμα!

Ξεκαθάρισε τώρα, ότι είναι δύο διαφορετικές πράξεις; Άρα, πώς το αποδεικνύουμε; Στην πραγματικότητα, μπορούμε να το κάνουμε, τουλάχιστον σε αυτό το επίπεδο. Προσπαθούμε να βρούμε έναν τύπο που εμείς γνωρίζουμε. Άρα, τεχνητά, προσπαθούμε να φτιάξουμε ένα τετράγωνο.

$a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=0$ υπονοώ βέβαια $a\neq 0$. Καταλήγουμε στο $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$.

Το πρώτο μέρος είναι τετράγωνο άρα θετικό. Το $4a^2$ είναι θετικό, άρα αυτό που θα μας πει αν είναι θετική ή αρνητική η λύση είναι το b^2-4ac=Δ.

Στην ουσία, απαντήσαμε και τις δύο ερωτήσεις χωρίς να χρησιμοποιήσουμε πολλά πράγματα. Είναι ένας έξυπνος τρόπος. Αν εγώ τώρα σας πω ότι αυτό

$ax_{1,2}^2+bx_{1,2}^2+c=0$ λύνεται, πώς θα το βρείτε; Πέστε ότι δεν μπορείτε να βρείτε εύκολη λύση. Πώς θα το βγάζατε; Η ιδέα είναι τι μπορούμε να κάνουμε έως εκεί που δεν μπορούμε να το κάνουμε μετά. Άρα, το ερώτημα που θέτω είναι ότι όταν θα πάμε στον τρίτο βαθμό θα κάνετε μία αλλαγή, και στον τέταρτο το ίδιο. Θα σκεφτείτε, μήπως μπορούμε να κάνουμε κάτι το ανάλογο με τον δεύτερο βαθμό. Ναι, μπορούμε και γίνεται.

Τη λύση του πρώτου βαθμού δεν μπορούμε να τη χρησιμοποιήσουμε για να βρούμε έναν τρόπο να ανακαλύψουμε τη λύση του τέταρτου γιατί ισχύει παντού. Ας το κοιτάξουμε πιο απλά. Έχουμε:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Λέω ότι έχω δύο λύσεις:

$ax_1^2 + bx_1 + c = 0$ και $ax_2^2 + bx_2 + c = 0$.

Μια στρατηγική που μπορούμε να ακολουθήσουμε είναι να αφαιρέσουμε το ένα από το άλλο. Άρα έχουμε: $a(x_1^2 - x_2^2) + b(x_1 - x_2) = 0$. Αυτό για $x_1 \neq x_2$ ισούται με

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, όπως ακριβώς στον πρώτο βαθμό. Αυτό που κάνουμε τώρα το σκέφτηκε ο Isaac Newton πολύ πριν από τον Galois και τον Abel.

Αν το σκεφτείτε καλά, τι κάνει; Αν θέλετε μπορούμε να το κάνουμε ακόμα πιο απλά. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το έχουμε λύσει ήδη. Άρα γράφω:

$$a(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

$$a[x^2 - \underbrace{(x_1 + x_2)}_{S}x + \underbrace{x_1x_2}_{P}] = 0$$

Άρα $S = -\frac{b}{a}$ και $P = \frac{c}{a}$. Αυτό είναι πολύ ωραίο. Διότι, εγώ τώρα δεν ξέρω ποιες είναι οι ρίζες. Ξέρω μόνο ότι όταν τις προσθέτω είναι το S και όταν τις πολλαπλασιάζω είναι το P. Αυτό που έκανε όμως, δεν είχε σχέση μόνο με το δεύτερο βαθμό. Μπορώ να γράψω $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a^0 = 0$

$a_n(x - x_1)(x - x_2)(\ldots)(x - x_n) = 0.$ Αν θέλω να εξετάσω το σταθερό σημείο από αυτή την εξίσωση *n* βαθμού θα πρέπει να θέσω $x = 0$. Άρα θα έχω:

$$a_n(-1)^n \cdot \prod_{i=1}^{n} x_i =$$

$=a_n(-1)^n \cdot P$. Εδώ αποδείξαμε πολύ απλά και πολύ ωραία ακολουθώντας τη μέθοδο του Newton ότι: $P = \frac{a_0}{a_n} \cdot (-1)^n$

Αυτό δεν είναι μια μικρή λεπτομέρεια. Λέμε ότι ισχύει ανεξάρτητα από το βαθμό του πολυωνύμου. Κανονικά θα μου πείτε ότι σας έχω πει ότι πάνω από τον πέμπτο βαθμό δεν μπορούμε να το λύσουμε.

Είδαμε κάτι το γενικό. Είναι μία τεχνική που ανέπτυξε ο Newton και ονομάζεται «Τα αθροίσματα του Newton». Εφόσον καταλάβατε ότι τα παραπάνω δεν έχουν καμία σχέση με το βαθμό του πολυωνύμου, καταλαβαίνετε ότι αποκλείεται να μας βοηθήσουν στην επίλυση με ρίζες.

Μετά θέλω να βρω το ανάλογο με αυτό. Αναρωτιέμαι εδώ:

$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n =;$ χωρίς να ξέρω ποιες είναι. Μία τακτική που μπορούμε να ακολουθήσουμε είναι να υποθέσουμε ότι αυτό ισχύει και λέμε ότι όταν το πολλαπλασιάζω, πώς βρίσκω τα στοιχεία που συμβάλλουν εδώ; Ο βαθμός του πρώτου είναι n-1. Άρα, αν πολλαπλασιάσω πολλά x και το άλλο να μην το κάνω, αλλά να βγάλω μόνο ένα. Αλλά δεν θέλω να το κάνω όλο. Άρα $-x_i \cdot x^{n-1}$. Αυτό όμως είναι μόνο για ένα έχοντας βγάλει το a_{n-1}. Για όλα γίνεται:

$-a_n \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot x^{n-1} = a_{n-1} x^{n-1}$. Το $-a_n \sum_{i=1}^{n} x_i$ το ονομάζω S και έχουμε

$S = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$. Αυτό είναι πολύ ωραίο.

Κάτι που έμαθε να λύνει ο Newton με τα αθροίσματα είναι αυτό: $x_1^2 + x_2^2 =;$. Θέλω να βρω αυτό το πράγμα αλλά δεν ξέρω να βρω τα x_1 x_2. Θέλω να βρω το άθροισμα των τετραγώνων αλλά δεν ξέρω να βρω τις ρίζες. Κοιτάξτε τι ωραίο πράγμα σκέφτηκε ο Newton. Λέει, αυτό δεν ξέρω να το βρω, αλλά ξέρω να βρω αυτό:

$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$. Αυτό όμως είναι το: $S^2 - 2P$. Αυτό ξέρω να το κάνω και μάλιστα ισχύει και για τους μιγαδικούς. Ο Newton ξέρει να το κάνει, ακόμα και αν δεν ξέρει τα x_1 x_2 και ακόμα καλύτερα, ακόμα και αν δεν υπάρχουν. Το μεγάλο θεώρημα των d'Alembert-Gauss, αποδεικνύει ότι στους μιγαδικούς ένα πολυώνυμο με $d^o(P) = n$ έχει *n* ρίζες, σας εξασφαλίζει ότι όλα αυτά λειτουργούν.

Τώρα έχουμε μπει σε ένα πλαίσιο, το οποίο λατρεύω, διότι είναι πώς ξέρετε να κάνετε κάτι χωρίς να ξέρετε να κάνετε κάτι. Πώς, δηλαδή, να κάνετε κάτι ολικό χωρίς να ξέρετε να το κάνετε τοπικά. Δεν ξέρετε πού πάνε τα δάχτυλα. Αλλά ξέρετε πού πάει το χέρι. Εφόσον είναι «δεμένα» στο χέρι ξέρετε πού πάνε. Αυτό σας λέει αυτή η μέθοδος.

Επανερχόμαστε σε ένα προηγούμενο ερώτημα για το πού έχει φτάσει η ανθρωπότητα. Αυτό που κατάφερε η ανθρωπότητα είναι να λύσει όλα αυτά τα προβλήματα ($1^{ου}$, $2^{ου}$, $3^{ου,}$ $4^{ου}$ βαθμού) και μετά τίποτα. Μετά γεννιέται ο Niels Abel. Θέλει να βρει τι γίνεται με τον 5° βαθμό. Αυτό έλεγα και στην Καλαμάτα σε μία διάλεξη, διότι με ρωτούσαν τι εννοώ όταν λέω ότι ο μαθηματικός πρέπει να έχει κότσια. Τους έδωσα αυτό το παράδειγμα. Λοιπόν, ο Abel παιδεύεται πάνω σε αυτό το πρόβλημα, μάλιστα θα βρούμε και συναρτήσεις Abel, ελλειπτικές, και θεωρεί ότι το έλυσε. Ότι έχει βρει, δηλαδή, το ανάλογο του Δ. Μετά ξανακοιτάζει την απόδειξή του και βρίσκει ένα λάθος. Άρα, πρώτη φάση: ο Abel θεωρεί ότι έλυσε εξισώσεις $5^{ου}$ βαθμού. Δεύτερη φάση: καταλαβαίνει ότι έχει κάνει λάθος. Τρίτη φάση: λέει ότι εφόσον αυτός δεν κατάφερε να το κάνει, δεν λύνεται. Δεν είναι απίστευτο; Η ανθρωπότητα να παλεύει πάνω σε αυτό το πρόβλημα πάνω από 1500 χρόνια, και να πετάγεται ένας νεαρούλης από τη Νορβηγία και να λέει: «Εγώ το έλυσα, μετά είδα ότι έκανα λάθος, άρα δεν λύνεται. Θα αποδείξω ότι δεν λύνεται». Αν αυτό δεν είναι κότσια, τότε δεν ξέρω τι είναι. Και το απέδειξε. Η τέταρτη φάση είναι η απόδειξη. Και η απόδειξη είναι το περίφημο θεώρημα του Abel που λέει ότι δεν υπάρχει γενικός τρόπος επίλυσης

εξίσωσης βαθμού άνω του 4 με τετραγωνικές ρίζες. Τι σημαίνει αυτό; Γιατί το κάνουμε στο δικό μας το μάθημα για τον Galois; Ο Galois παλεύει για το ίδιο θέμα. Δύο χρόνια μετά από αυτό το θεώρημα ακόμα παλεύει να το λύσει. Δεν ξέρει για το θεώρημα. Υπάρχει μια πολύ μεγάλη διαφορά ηλικίας (λίγο οξύμωρο για ανθρώπους που έχουν πεθάνει στα 27 και τα 21). Σιγά-σιγά ο Galois ανακαλύπτει ότι υπάρχει αυτό το θεώρημα.

Αμέσως, όμως, θα πει ότι δεν μας ενδιαφέρει αν υπάρχει ή όχι ένας γενικός αλγόριθμος. Μας ενδιαφέρει να μάθουμε αν έχουμε μια ειδική εξίσωση που να μπορούμε να τη λύσουμε. Θα δούμε ένα παράδειγμα. Ας πούμε ότι παίρνουμε την εξίσωση $x^5 = 1$. Το θεώρημα του Abel θα σας πει ότι δεν υπάρχει μία γενική μέθοδος για να λύσετε μία εξίσωση 5^{ου} βαθμού. Ο Galois το δέχεται αυτό αλλά θέλει να πάει πιο πέρα και σκέφτεται πώς μπορεί να το λύσει. Αντί να κοιτάξει το γενικό, θα κοιτάξει το ειδικό. Μήπως μπορεί να βρει για κάθε εξίσωση κάτι, που αν το έχει μπορεί να μας πει αν αυτή λύνεται, και αν δεν το έχει δεν λύνεται. Αυτό είναι που αργότερα θα ονομάσουμε οι έννοιες της Ομάδας Galois. Και δεν είναι μία ομάδα γενικά. Όπως έχουμε τις αβελιανές ομάδες έτσι είναι και οι Ομάδες Galois. Οι αβελιανές ομάδες βέβαια, δεν έχουν νόημα για τον Abel, γιατί ο Abel δεν ξέρει ακόμα τι είναι ομάδες. Άρα ονομάσαμε τις αβελιανές ομάδες μετά τον Abel και τον Galois, ερμηνεύοντας ξανά με αυτά που έκανε ο Galois αυτά που είχε κάνει ο Abel. Στο opus υπάρχει ένα άρθρο στο οποίο ανέλυσα το πρώτο άρθρο του Abel. (βλέπε http://www.lygeros.org/Abel.html)

Είναι το πρώτο άρθρο του Abel όπου ασχολείται με επίλυση συναρτησιακών εξισώσεων που έχουν συμμετρίες. Εδώ, ένα πράγμα που ξέρουμε, όταν έχουμε κάνει μιγαδικούς αριθμούς, είναι ότι η επόμενη εξίσωση

$$x^5-1=0$$

έχει μία λύση που είναι

$$e^{\frac{2i\pi\kappa}{5}}$$

ξέρουμε ότι είναι αυτό το γενικό πλαίσιο και μετά επί κ για $\kappa = 0\ldots4$. Ένα πρόβλημα που προβληματίζει τον Galois είναι:

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta \text{ (Euler-Moivre)}$$

άρα αυτό μπορώ να το γράψω ως:

$$e^{\frac{2i\pi\kappa}{5}}\Big|_{\kappa=0\ldots4}=\cos\left(\frac{2\pi\kappa}{5}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi\kappa}{5}\right)\Big|_{\kappa=0\ldots4}$$

Λέει, λοιπόν, ο Galois: «Εντάξει, δεχόμαστε το θεώρημα του Abel, είναι πολύ σημαντικό, αλλά το θέμα είναι μήπως μπορούμε να πάμε ακόμα πιο πέρα; Και για μερικές περιπτώσεις, όπως η παραπάνω, να βρίσκουμε τις ρίζες, τη λύση, παρόλο που

δεν υπάρχει γενική επίλυση;» Ας κοιτάξουμε αυτή τη λύση. Εδώ έχουμε ένα πολυώνυμο λίγο παράξενο, γιατί έχει μόνο 1 και όλοι οι άλλοι συντελεστές είναι μηδέν εκτός από το τελευταίο που είναι -1. Άρα μπορώ να το γράψω έτσι:

$x^5-1=0$

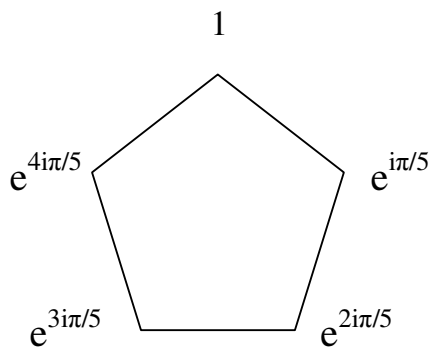
αυτό που ξέρετε τώρα είναι ότι:

$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0$ και

$x_1x_2x_3x_4x_5=1$

Τώρα, αν θυμηθούμε ότι το $x_1=1$ άρα ένα από αυτά είναι 1, δηλαδή το ουδέτερο στοιχείο της ομάδας $\mathbf{Z}_5$.

Αυτό μπορούμε να το γράψουμε αλλιώς:



Οπότε έχετε 5 δείκτες, και αυτό δεν το είχαν καταλάβει στην αρχή. Και ξέρετε γιατί δεν το είχαν καταλάβει; Εδώ είναι η ιδέα η ριζοσπαστική του Galois. Είναι ότι δεν κοίταξε αυτό: $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0$

Κοίταξε μόνο αυτό:

$x_1x_2x_3x_4x_5=1$

γιατί το πρώτο εξηγείται από το εξής φαινόμενο:

$1+\kappa+\kappa^2+\kappa^3+\kappa^4$ το οποίο είναι $(1-\kappa^5)/(1-\kappa)$, άθροισμα γεωμετρικής προόδου. Αλλά αυτό δεν έχει σχέση με αυτά που έψαχνε ο Galois. Άρα κατάλαβε ο Galois αυτό που ξέρουν σήμερα όσοι έχουν κάνει λίγο Θεωρία Ομάδων, ότι στη Θεωρία Ομάδων χρησιμοποιούμε μόνο μία πράξη. Χρησιμοποιούμε δύο πράξεις στο δακτύλιο και στο σώμα. Ο Galois θα ασχοληθεί μόνο με το ένα κομμάτι. Θα σκεφτεί: «Μήπως αν έχω ενδείξεις και τα μαζεύω όλα μαζί…». Προσέχει ότι όταν πολλαπλασιάζει δύο ρίζες, βρίσκει μία άλλη ρίζα. Δηλαδή παρατηρεί ότι όταν πολλαπλασιάζει δύο ρίζες, δεν μπορεί να εμφανιστεί κάπου αλλού, δηλαδή δεν μπορεί να βγει από τις ρίζες, ή

ότι αν βγει, υπάρχει κάποιο πρόβλημα. Είναι ότι δεν υπάρχει στην ουσία αυτό που θα ονομάσουμε «Ομάδα Galois». Άρα όταν υπάρχει Ομάδα Galois και είναι Resoluble (επιλύσιμη), τότε θα μπορώ να πω ότι λύνεται με ρίζες. Αυτή η ιδέα είναι πολύ σοβαρή. Κοιτάξτε στο παράδειγμά μας, ξέρουμε ότι όπως η μία ρίζα είναι το 1 και οι άλλοι είναι μιγαδικοί, άρα θα είναι ανά δύο ζεύγη συζυγών:

1, x_2, $\bar{x}_2$, x_4, $\bar{x}_4$. Όταν έχετε ένα μιγαδικό αριθμό, έχετε το δικαίωμα να γράψετε ότι είναι το ίδιο με:

$z=z\frac{\bar{z}}{\bar{z}}=\frac{z\bar{z}}{\bar{z}}$ όπου το πάνω μέρος ισούται με $|z|^2=1$ (1)

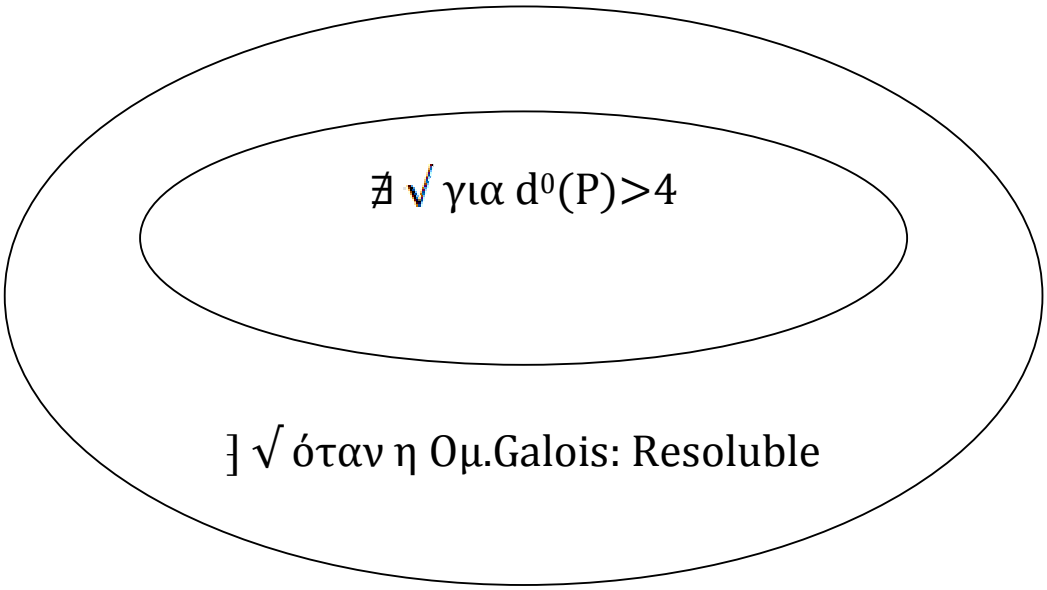
Προσέξτε τώρα τι σκέφτηκε ο Galois. Εάν αυτό –που είναι μιγαδικός, πούμε ότι είναι πραγματικός– τότε όλοι αυτοί έχουν μία ιδιότητα. Έχουν όλοι μέτρο 1. Οπότε λέει πως εφόσον έχουν όλοι μέτρο 1, θα βάλω εδώ το 1 και θα το ονομάσω ουδέτερο. Άρα ο συζυγής στη Θεωρία Ομάδων θα είναι ο αντίστροφος. Δηλαδή όταν το πολλαπλασιάζω με αυτό είναι όπως αυτό που ξέρουμε εμείς ως: $x\,x^{-1}=1$ (2)

Το ωραίο είναι ότι ο Galois κατάφερε να δει μία πράξη που κοιτάζετε συνεχώς και να τη δείξει μέσα από μία άλλη πράξη που δεν ξέραμε τότε. Γιατί, προσέξτε, και ο Euler και ο Gauss ξέρουν για μιγαδικούς αριθμούς. Κι όμως έρχεται ένας νέος 21 ετών και λέει «μήπως αυτό που γράφουμε συνεχώς, μπορεί να γραφεί έτσι (1) και (2);». Μα άμα γράφεται έτσι, σημαίνει ότι αυτό είναι ο αντίστροφός του. Κι αυτό σημαίνει ότι μπορώ να το γράψω ως (2). Άρα η ιδέα του Galois εδώ είναι πάνω στο πότε έχω δικαίωμα να το γράψω αυτό; Και έχω δικαίωμα να το γράψω αυτό, όταν είναι επιλύσιμη η Ομάδα του Galois. Άρα θα δημιουργήσει ένα μεγάλο θεώρημα ο Galois και θα σας πει ότι μία εξίσωση *n*-οστού βαθμού, λύνεται με ρίζες όταν η Ομάδα του Galois είναι επιλύσιμη. Αυτό είναι από τα πιο σημαντικά θεωρήματα που έχουμε, είναι φανταστικό. Και γιατί είναι φανταστικό; Επειδή ο Galois όταν ήταν μικρός ήξερε το θεώρημα του Abel. Ε, το θεώρημα του Galois γενίκευσε αυτό. Γιατί είναι γενίκευση.

Για να ανακεφαλαιώσουμε. Το θεώρημα του Abel σάς λέει ότι δεν υπάρχει γενική λύση για εξισώσεις βαθμού μεγαλύτερου του 4. Το θεώρημα του Galois λέει ότι υπάρχει λύση (θα το ονομάζουμε ρίζα) όταν η Ομάδα του Galois επιλύεται. Βέβαια, όταν το βλέπετε το ένα δίπλα στο άλλο, λέτε τι σχέση έχει το ένα με το άλλο. Προσέξτε, ο Galois το κάνει αυτό με ένα γενικό πολυώνυμο. Άρα, όταν γράφετε το πολυώνυμο

$$P=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$$

ο Galois μπορεί να εφαρμοστεί πάνω σε αυτό. Και εδώ θα σας πει ότι η Ομάδα του Galois, ακόμα και να μη βάλετε αριθμούς, λύνεται. Όταν θα κάνετε το ίδιο με το 5, θα σας πει, δεν λύνεται αλλά αν βάλετε κάποια νούμερα, λύνεται. Άρα το θεώρημα του Galois γενικεύει απολύτως αυτό του Abel. Σχηματικά το βλέπουμε ως εξής:



Αλλά όχι μόνο το γενικεύει. Σας δίνει και λύσεις όταν το άλλο δεν σας λέει τίποτε πια. Δηλαδή λέει ακριβώς το 4 και από εκεί σας λέει για ποια υπάρχει λύση. Αυτό είναι σημαντικό να το αναλύσουμε ακόμα και νοητικά. Έχουμε το εξής σχήμα:

Πρώτα η ανθρωπότητα κάνει μία γραμμική προσέγγιση ενός προβλήματος. Έρχεται ένας μη γραμμικός, ο Abel, και λέει: «Εγώ το προσπάθησα, το έλυσα, έκανα λάθος – δεν λύνεται– άρα δεν υπάρχει λύση.» Κανονικά, ένας κανονικός άνθρωπος μετά από αυτό θα έλεγε, εντάξει, ας πάμε σε έναν άλλο τομέα. Ο Galois δεν είναι κανονικός. Ο Galois είναι ο νάνος που θα πατήσει πάνω στους ώμους του γίγαντα. Και λέει, εμένα δεν με ενδιαφέρει αν είμαι πιο νέος, θα πατήσω πάνω στο γίγαντα και εφόσον έχει φτάσει μέχρι εδώ, εγώ θα πάω πιο πάνω και θα δω, ό,τι δεν βλέπει. Δηλαδή στην αρχή λέτε, εντάξει αφού το απέδειξε ότι μέχρι 4 λύνεται, τι μπορεί να βρει ο άλλος; Και εκεί που σας λέει πως δεν υπάρχει τίποτα, μετά έρχεται ο Evariste και λέει, για να δούμε αν μπορούμε εκεί που δεν υπάρχει τίποτα να βρούμε κάτι. Και χρησιμοποιώντας αυτή τη μέθοδο, αποδεικνύει με έναν άλλο τρόπο το προηγούμενο θεώρημα το οποίο ήταν αρνητικό, δηλαδή σου λέει μετά από εδώ δεν μπορείς, και λέει πως αυτό μπορώ, μπορώ, μπορώ, μπορώ, δεν μπορώ γενικά, μπορώ ειδικά, ειδικά, ειδικά... Άρα σας δίνει ένα σχήμα ακόμα και για θέματα νοημοσύνης γιατί λέτε πολύ συχνά ότι αυτός το μελέτησε, το βρήκε, το έλυσε άρα τι να κάνω άλλο. Και βλέπετε ότι έχει φτάσει ως ένα όριο. Θα μου πείτε τώρα γιατί ο Abel δεν πήγε πιο πέρα. Μα ο Abel τράβηξε ένα τεράστιο «κουπί» για να σκεφτεί ότι δεν γίνεται. Ενώ ο Galois δεν το σκέφτηκε ότι δεν γίνεται όταν ήταν 16 χρονών. Ναι αλλά ήταν 16 χρονών, μην τα ξεχνάμε αυτά. Μετά καταλαβαίνει ότι τελικά δεν γίνεται. Αλλά λέει ας πάμε πιο πέρα από αυτόν που το σκέφτηκε. Παρεμπιπτόντως αυτοί που θεωρούν ότι ο Abel δεν έκανε τίποτα μετά, όπως καταλαβαίνετε, αυτά που έκανε μετά είναι πολύ πιο τεράστια από απλώς αυτό το θεώρημα που είναι τεράστιο. Δηλαδή έχουμε ένα πρόβλημα με τα τεράστια με τον Abel. Γιατί λέτε, εντάξει, αν είχα αποδείξει εγώ αυτό το πράγμα στη ζωή μου, μετά πάω κάθομαι και είμαι ευχαριστημένος. Για τον

Abel ήταν απλώς η αρχή μίας διαδικασίας. Αυτός είπε, ας αρχίσουμε πρώτα με ένα πρόβλημα που δεν έχει λύσει κανείς εδώ και 1500 χρόνια, το λύνει και μετά αρχίζει τα δικά του μαθηματικά. Αυτό είναι που θέλω να αγαπήσετε. Θέλω να μπείτε σε αυτό το πλαίσιο, να σκεφτείτε ότι στις 500 σελίδες από τα χειρόγραφα του Abel, το μεγάλο θεώρημα του Abel δεν είναι προς το τέλος. Και λες, μετά τι έκανε αυτός ο άνθρωπος; Αυτό που καταλάβαμε σε κάποια φάση είναι ότι το να λύνουμε με ρίζες μπορεί να μην είναι αντιπροσωπευτικό. Μήπως μπορούμε να φτιάξουμε άλλες συναρτήσεις; Αυτό το κάνουμε στα Μαθηματικά σε έναν άλλο τομέα. Ξέρουμε ότι όταν έχουμε ένα πολυώνυμο x^n και το παραγωγίζουμε βρίσκουμε:

$(x^n)'=n\,x^{n-1}$

Όταν το ολοκληρώνετε γίνεται:

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \qquad n\neq -1$$

Μέχρι εδώ θεωρείτε ότι όλα πάνε καλά. Ωστόσο τι γίνεται όταν το n ισούται με -1; Τότε έχουμε:

$$\int x^{-1}\,dx$$

Ναι, αλλά εδώ τώρα φεύγουμε από τα πολυώνυμα. Γιατί η απάντηση σε αυτό το ολοκλήρωμα είναι αυτό:

$$\int x^{-1}\,dx = \int \frac{dx}{x} = \ln x + c$$

Άρα μία ιδέα που είναι πολύ σημαντική είναι ότι μπορεί να είμαστε σε ένα πλαίσιο και να λέμε ότι όλα πάνε καλά όσο είμαστε σε αυτό το πλαίσιο. Στην ουσία, αν το δείτε καλά είναι σαν να έχετε πάλι μία ομάδα, έχετε την ομάδα με τα πολυώνυμα. Αλλά έχετε ένα πρόβλημα σε ένα σημείο. Σε ένα σημείο αναγκαστήκατε να επινοήσετε μια νέα κλάση.

Μια ιδέα που είναι πολύ σημαντική είναι ότι μπορεί να είμαστε σε ένα πλαίσιο και να θεωρούμε ότι όλα πάνε καλά. Στην ουσία είναι σαν να έχετε πάλι μία ομάδα. Έχετε την ομάδα με τα πολυώνυμα. Αλλά έχετε ένα πρόβλημα σε ένα σημείο, όπου αναγκαστήκατε να επινοήσετε μία νέα συνάρτηση. Ένα από αυτά που θα πει ο Abel, είναι ότι ξέρει να λύνει τις εξισώσεις $5^{ου}$ βαθμού. Δεν έρχεται σε αντίφαση με το θεώρημα, γιατί λέει ότι δεν μπορούμε να το λύσουμε με ρίζες. Άρα, δημιούργησε αυτό που ονομάζουμε ελλειπτική συνάρτηση, που είναι πιο πολύπλοκη και μπορεί να λύνει τις εξισώσεις $5^{ου}$ βαθμού. Το σημαντικό σε αυτό το σχήμα είναι ακριβώς εδώ. Έχετε ένα κλασικό σχήμα, $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$, και δίπλα έχετε το μη κλασικό για το οποίο προκύπτει η ανάγκη να το ονομάσετε κάπως. Και δεν έχει μικρό ενδιαφέρον.

Ας το κοιτάξουμε αλλιώς. Από το μη κλασικό σχήμα, το πρώτο μέρος έχει την εξής ιδιότητα: $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$, ενώ η νέα συνάρτηση έχει αυτήν: $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$. Και εδώ θα πρέπει να μας εξηγήσει κάποιος από εσάς πώς ο Abel κατάφερε να βρει συναρτήσεις με δύο περιόδους. Ο λογάριθμος δεν έχει τις ίδιες ιδιότητες με τους άλλους, όμως προέρχεται από μία ολοκλήρωση. Είναι ένα ολοκλήρωμα όπως όλοι οι άλλοι. Άρα, ενώ κάνουμε την ίδια διαδικασία, ξαφνικά μας εμφανίζεται ένα καινούργιο πράγμα. Μετά, ο Abel άρχισε να εξετάζει μήπως αυτό το πράγμα έχει κάποιες ιδιότητες που οι άλλοι δεν έχουν καθόλου. Γι' αυτό έχετε ένα παράδειγμα. Δεν υπολογίζουμε αυτά που έχουμε κάνει μέχρι τώρα και θέλουμε να δούμε ποιες συναρτήσεις επιβεβαιώνουν αυτό $f(x) + f(y) = f(xy)$. Το πρώτο πράγμα που μπορούμε να κάνουμε είναι να γράψουμε έστω ότι $y = 1$. Άρα:

$f(x) + f(1) = f(1x) = f(x)$. Εδώ αποδεικνύουμε ότι $f(1) = 0$. Τώρα, έστω $xy = 1$. Γράφετε ότι το $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = f(1) = 0$ δηλαδή $f(x^{-1}) = -1f(x)$. Αυτό σημαίνει ότι μέχρι τώρα έχω δει μια συμμετρία με το 1 σε σχέση με το δεξιά-αριστερά. Τώρα, αν γράψω ότι έστω $x = y$, τι σημαίνει αυτό; Σημαίνει ότι $f(x) + f(x) = f(x^2) = 2f(x)$. Από αυτό εξάγουμε μετά επαγωγικά ότι

$f(x^n) = nf(x)$. Όπως καταλαβαίνετε, όλα αυτά που κάνουμε μας αναγκάζουν σιγά - σιγά να δούμε ότι έχουν ακριβώς τις ίδιες ιδιότητες με το λογάριθμο. Και είναι ακόμα πιο ωραίο από ό,τι νομίζετε, διότι δεν μπορούμε να βρούμε άλλη συνάρτηση που να το κάνει αυτό και να μην είναι λογάριθμος.

Άρα βλέπετε ότι δώσαμε σε αυτό το μάθημα δύο ιδέες πολύ σημαντικές στα μαθηματικά και στη μαθηματική σκέψη. Μπορεί να το παλεύουμε γραμμικά για να λύσουμε μερικά προβλήματα, αλλά αυτά μπορούν να λυθούν μη γραμμικά. Αυτό είναι το ένα νοητικό σχήμα. Το μη γραμμικό μπορεί να σας δημιουργήσει μία αλλαγή φάσης όπου θα βρείτε οντότητες που δεν υπήρχαν πριν, όπως ο λογάριθμος και οι αβελιανές συναρτήσεις που προέρχονται στην ουσία από τη μη ικανότητα επίλυσης ενός προβλήματος. Σκεφτείτε το καλά. Όταν κάναμε πριν το θεώρημα Gauss-d'Alembert όταν γράφαμε $x^2 = -1$, δεν λέγαμε ότι είναι αδύνατον; Γιατί μετά λέμε ότι είναι δυνατόν; Διότι λέμε, ας ορίσουμε ότι υπάρχει i που όταν κάνουμε i^2 θα μας κάνει -1. Και γι' αυτό μετά, εφόσον έχω αποφασίσει ότι $i = \sqrt{-1}$, μετά μπορώ να σκεφτώ πράγματα τα οποία ήταν αδιανόητα. Βάζω i^i. Άντε να σκεφτείτε τι είναι αυτό! Δηλαδή, είναι ένας φανταστικός που η δύναμη του είναι φανταστική. Υπάρχει αυτό; Πού να το σκεφτείτε πριν; Να σας έλεγα, δηλαδή, όχι μόνο ότι υπάρχει η $\sqrt{-1}$ αλλά είναι υψωμένο και στη δύναμη $\sqrt{-1}$. Κοιτάξτε. Το i δεν είναι ίσο με το 0+1 i;

$$i = 0 + 1i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Άρα το i^i μπορούμε να το γράψουμε $\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^i = e^{i^2\frac{\pi}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}}$ άρα πραγματικός! Αυτό αν δεν σας ξαφνιάζει, τι άλλο θα σας ξάφνιαζε; Οι πράξεις που έκανα εδώ είναι πολύ απλές -τρόπος του λέγειν. Μόνο που για κάθε μία από αυτές χρειαστήκαμε πάρα πολλά χρόνια για να το σκεφτούμε. Αυτά, παιδιά, είναι όμορφα. Δείτε ένα νοητικό σχήμα:

Δεν το έχω σκεφτεί
Ουτοπία
Όνειρο
Όραμα
Θεώρημα

Πολύ συχνά οι ιδιοφυΐες είναι αυτές που κατάφεραν από το «Δεν το έχω σκεφτεί» να μας το μεταφέρουν στην «Ουτοπία». Δηλαδή, πριν από αυτούς κανένας δεν το σκεφτόταν. Μετά από αυτούς έλεγαν ότι ήταν αδύνατον να γίνει. Μετά από αυτούς, έρχεται κάποιος άλλος νέος που δεν ξέρει ότι είναι αδύνατον και λέει ότι το ονειρεύεται. Μετά έρχεται ένας άλλος νέος και λέει ότι το οραματίζεται. Και μετά έρχεται ένας άλλος και το κάνει. Αυτό είναι ένα σχήμα που θα δείτε στα πολύ όμορφα μαθηματικά. Η μεγάλη προσπάθεια είναι από το «Δεν το έχω σκεφτεί» να κατεβούμε στην «Ουτοπία», δηλαδή να σκεφτώ ότι αυτό είναι αδύνατον. Και να έρθει ένας και να μας πει ότι είναι αδύνατον, αλλά προς το παρόν. Προσπαθήστε να σκεφτείτε κάτι που δεν έχετε καν σκεφτεί ότι θα μπορούσε να είναι αδύνατον.

Ξαναγυρίζουμε σε αυτό που λέγαμε στην αρχή. Προσπαθούμε να δημιουργήσουμε το κατάλληλο πλαίσιο για τη Θεωρία Ομάδων. Η Θεωρία Ομάδων τι είναι; Ο Abel κατάφερε να σκεφτεί κάτι που για πολλά χρόνια ήταν μία ουτοπία. Δηλαδή, η ανθρωπότητα θεωρούσε ότι κάποια στιγμή θα λύναμε τις εξισώσεις 5^{ου} βαθμού. Έρχεται, λοιπόν, αυτός και το κάνει όνειρο, και μετά όραμα και θεώρημα. Αλλά δεν είναι μόνο αυτός που το σκέφτηκε. Γιατί όταν έχετε μία ουτοπία και σου λένε ότι μετά τον 4^{ο} βαθμό δεν γίνεται, έρχεται ο Galois και σκέφτεται μετά το 4 τι γίνεται; Θα ήταν καλό να βρω μια θεωρία. Εμείς θα ασχοληθούμε με τη φάση μεταξύ «ονείρου» και «οράματος». Εκεί βρίσκεται η διαθήκη. Δηλαδή, λέει: «Θα ήταν καλό να γίνει αυτό» ή «Αυτό το οραματίζομαι». Και τώρα εμείς μετά από το βιβλίο που έχουμε και τις μελέτες κλπ, είμαστε στη φάση «Θεώρημα».

Ένα θεώρημα στη Θεωρία Ομάδων που είναι εντελώς ακατανόητο -γι' αυτό μου αρέσει τόσο πολύ- είναι το θεώρημα του John Gordon Thomson. Στη Θεωρία Ομάδων ενδιαφερόμαστε για την ταξινόμηση των ομάδων τις οποίες ονομάζουμε απλές. Μην ανησυχείτε όμως, δεν έχουν τίποτα που να είναι απλό. Καταφέρνουν να είναι απλές, αλλά όχι απλοϊκές. Οι κυκλικές ομάδες με πρώτο αριθμό είναι απλές. Όχι

οι άλλες, γιατί τις άλλες μπορείς να τις ξαναφτιάξεις. Αν βγάλετε τις κυκλικές ομάδες από τις απλές και μελετήσετε αυτές που σας μένουν -που στην ουσία δεν ξέρετε ποιες ακριβώς είναι- μπορεί να είναι η τάξη τους περιττή ή άρτια; Ο Thomson απέδειξε ότι όλων των άλλων η τάξη είναι άρτια. Μπορεί να μη σας φαίνεται πολύ σπουδαίο αυτό που έκανε, αλλά θα σας πω πώς το έκανε. Είπε ότι θα υποθέσουμε ότι υπάρχουν ομάδες που η τάξη τους είναι περιττή. Αρχίζει, λοιπόν, και γράφει μια ολόκληρη θεωρία για αυτές τις ομάδες που είναι έκτασης 200 σελίδων. Και αποδεικνύει στο τέλος, ότι αυτή η θεωρία είναι κενή. Δηλαδή, έχει τόσο όμορφες ιδιότητες που δεν υπάρχει καμία ομάδα που να τις έχει όλες μαζί. Και έτσι τώρα ξέρουμε ότι όλες είναι άρτιας τάξης. Ποιος θα τολμούσε να ασχοληθεί σε 200 σελίδες με κάτι που δεν υπάρχει; Αυτή η ιδέα έγινε και άλλες φορές, αλλά αυτή ήταν η πρώτη φορά.

Ένας Γάλλος μαθηματικός, ο Yves Hellegouarche ασχολήθηκε με το μεγάλο θεώρημα του Fermat και είναι ο πρώτος που είχε σημειώσει μερικές ιδέες πάνω σε μερικές ιδιότητες που μπορεί να έχουν κάποιες ελλειπτικές συναρτήσεις. Τις μελετούσε, τις μελετούσε, τις έκανε ακόμα πιο ωραίες. Και στο τέλος, ήταν πάρα πολύ ωραίες, τόσο που ήταν η πρώτη φάση να αποδείξουμε μετά ότι επειδή δεν υπήρχαν τέτοιες συναρτήσεις, δεν υπάρχει λύση στο Μεγάλο Θεώρημα του Fermat. Υπάρχουν και τέτοια μαθηματικά. Θέλω σε αυτό το μάθημα να αγγίξουμε και τέτοιες προσεγγίσεις και να δείτε ότι δεν είναι μόνο εκφώνηση, πρόβλημα, επίλυση, τέλος. Δεν είναι μόνο αυτά. Υπάρχει πολλή φαντασία για το πώς να προσεγγίσετε διάφορες καταστάσεις. Η Θεωρία Ομάδων κατέχει και ένα άλλο παγκόσμιο ρεκόρ που δύσκολα καταρρίπτεται. Στις απλές ομάδες, υπάρχει μία ειδική κατηγορία. Οι άλλες είναι άπειρες και του ίδιου τύπου. Έχετε όμως μία ομάδα από άτομα που δεν ανήκουν σε καμία παρέα. Αυτές οι ομάδες λέγονται Σποραδικές, στα αγγλικά Sporadics! Το μεγάλο θεώρημα των σποραδικών ομάδων είναι ότι είναι 26. Ο μεγάλος συνθέτης όλης αυτής της θεωρίας είναι ο Daniel Gorenstein. Αυτός συνδύασε όλες τις αποδείξεις όλων όσων ασχολήθηκαν (Thomson, Galois) και αυτή η απόδειξη παίρνει 15000 σελίδες. Και πριν 5 χρόνια καταφέραμε να τη συμπιέσουμε σε 5000 σελίδες. Αυτά όλα είναι στο «Θεώρημα». Εμείς θέλουμε να δούμε πώς εξελίχθηκαν τα πράγματα. Όταν ακούτε τον Νανόπουλο να μιλάει για ενοποίηση ομάδων, αυτά που ακούτε με το CERN ασχολούνται με ομάδες. Οι ομάδες αυτές είναι ειδικές μοναδιαίες ομάδες. Η πιο εξελιγμένη προς το παρόν είναι η SU(5). Όταν θα τη δούμε, θα σας φανεί πολύ απλή. Είναι ένας πίνακας που θα λειτουργήσει σαν ομάδα όταν πολλαπλασιάζεται και το ίχνος του είναι μία συγκεκριμένη τιμή και η ορίζουσα μία συγκεκριμένη τιμή. Με αυτά εδώ μπορείτε να πετύχετε όλη τη χρωμοδυναμική. (Είναι η μεγάλη θεωρία των ισχυρών δυνάμεων που καθορίζουν το πώς παίζουν τα κουάρκ μεταξύ τους). Με αυτή τη θεωρία τώρα προβλέπουμε ότι υπάρχουν 20 διαφορετικά κουάρκ. Και φέτος το Fermilab βρήκε το 13°. Και όλα αυτά σχετίζονται με τη Θεωρία Ομάδων.