4236) Μιγαδική προσέγγιση στη Θεωρία Ομάδων

Ο Evariste Galois είναι ο δημιουργός της Θεωρίας Ομάδων. Αν είχατε παρακολουθήσει το μάθημα Ιστορία και Φιλοσοφία των Μαθηματικών, θα σας βοηθούσε γιατί θα γνωρίζατε ότι γεννήθηκε το 1811 και πέθανε το 1832, καθώς και όλο το πλαίσιο. Δεν πειράζει όμως, θα το ξαναδώσω.

Τη Θεωρία Ομάδων την αντιλαμβάνεστε σαν μία πρόσφατη θεωρία; Δηλαδή, αν είχα βάλει αντί για Θεωρία Ομάδων, Θεωρία Αριθμών θα είχατε πάλι επιλέξει το μάθημα αυτό; Η Θεωρία Ομάδων είναι πιο πολύπλοκη. Πιο έξυπνη, πιο δύσκολη να την καταλάβουμε. Είναι καλό να ξέρουμε ότι υπάρχει μόνο από τον $19^{ο}$ αιώνα. Από τα μαθηματικά που ξέρετε, ποια είναι τα πιο σύγχρονα; Όπως καταλαβαίνετε, το θεώρημα του Πυθαγόρα είναι αρκετά παλιό. Ένα θεώρημα που σας φαίνεται ή που ξέρετε ότι είναι πιο καινούργιο; Όταν συναντάτε ένα θεώρημα, δεν βλέπετε πότε προέκυψε; Πάντως αυτό που μου αρέσει σε εσάς είναι ότι είστε τόσο αναίσθητοι όσο και εγώ. Είναι θεαματικό να τολμήσετε να μπείτε σε αυτό το μάθημα. Εμένα μου αρέσει πολύ αυτό. Γιατί και εγώ έπαιρνα τέτοια μαθήματα. Με ρωτούσε ο καθηγητής γιατί μπήκα σε αυτό το μάθημα, εγώ δεν ήξερα καν ποιος ήταν ο τίτλος του μαθήματος και έλεγα γιατί φαινόταν συμπαθητικός ο διδάσκων. Και είμαστε στη Θράκη. Δηλαδή, δεν είμαστε σε ένα πανεπιστήμιο στη Γαλλία ή στη Γερμανία που μπαίνουν οι φοιτητές χωρίς να ξέρουν καν τι θα κάνουν.

Ωραία! Ας κοιτάξουμε λίγο τι έχετε κάνει μέχρι τώρα. Έχετε κάνει διοφαντικές εξισώσεις που είναι λίγο πιο σύγχρονες από το προηγούμενο. Έχετε κάνει κωνικές τομές (κύκλος, έλλειψη, υπερβολή, παραβολή). Αυτά είναι πιο πρόσφατα, αλλά ανήκουν ακόμα στην αρχαιότητα. Τι έχετε κάνει το πιο πρόσφατο; Έχετε κάνει την έννοια της συνέχειας σε μια συνάρτηση, της παραγώγου. Έχετε κάνει την έννοια του ολοκληρώματος και εδώ, είστε ήδη στον $17^{ο}$ αιώνα με τους Leibniz, Bernoulli, Euler, Gauss. Στην πραγματικότητα, έτσι όπως είστε τώρα, δεν έχετε κάνει ποτέ μαθηματικά του $19^{ου}$ αιώνα.

Η ιδέα του Galois για τη Θεωρία Ομάδων είναι πρώτα από όλα η Θεωρία Εξισώσεων. Η θεωρία εξισώσεων ασχολείται με εξισώσεις $1^{ου}$, $2^{ου}$, $3^{ου, \cdots}$ βαθμού. Σας ξαναγράφω το παράδειγμα που είναι πολύ απλό: ax^2+bx+c=0. Όταν έχετε αυτό, γράφετε $\Delta = b^2 - 4ac$ και λέτε ότι οι $x_{1,2} = -\frac{b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ είναι οι δύο λύσεις. Αυτό που έχει ενδιαφέρον είναι να δούμε τι είναι το ανάλογο του Δ στις εξισώσεις $3^{ου}$ βαθμού. Αν ήταν η εξίσωση $3^{ου}$ βαθμού, θα υπήρχε ένα Δ; Στον $4^{ο}$ θα υπήρχε και εκεί διακρίνουσα; Υπάρχει αυτή η έννοια; Η ανθρωπότητα, όπως ξέρετε, σε αυτό τον τομέα βρήκε τις εξισώσεις $1^{ου}$ βαθμού ήδη από την αρχαιότητα (αιγυπτιακή), του $2^{ου}$ βαθμού πιο μετά, πάλι αρχαιότητα αλλά ελληνική, $3^{ου}$ βαθμού και $4^{ου}$ το Μεσαίωνα, άρα έχουμε διακρίνουσα και εδώ. Την $4^{ου}$ βαθμού καταφέρνουμε να τη μετατρέψουμε σε μία άλλη εξίσωση λίγο πιο δύσκολη αλλά $3^{ου}$ βαθμού. Μετά έρχεται το Θεώρημα του Niels Abel το οποίο λέει ότι δεν υπάρχει γενική επίλυση με ρίζες για πολυώνυμο τάξης πάνω από $4^{ο}$ βαθμό ($d^0(P) > 4)$. Δηλαδή, σας λέει ότι εσείς ξέρετε να λύνετε τις $2^{ου}$ βαθμού, στις $3^{ου}$ μπορείτε να κάνετε κάτι το ανάλογο, στις $4^{ου}$ πάλι κάτι ανάλογο στις $5^{ου}$ και μετά δεν γίνεται. Αυτό είναι το θεώρημα του Abel. Προσέξτε, το παράδειγμα που έδωσα σε προηγούμενο μάθημα είναι το εξής: $x^5 = 1$. Όσοι απουσίαζαν την προηγούμενη φορά ξέρετε να τη λύσετε; Αν σας βάλω $x^5 = 1$, μπορείτε να μου βρείτε τα x; Αν σας είχα βάλει $x^2 = 1$, ποιες είναι οι λύσεις; Εδώ μου απαντάτε αμέσως ± 1. Αν βάλω $x^3 = 1$; Είμαστε αναγκασμένοι να χρησιμοποιήσουμε μιγαδικούς αριθμούς. Διότι έχουμε μία λύση που είναι το 1 και μετά j και $\bar{j}$. Σας θυμίζει κάτι αυτό; Άρα, αυτό εδώ είναι $e^{2i\pi/3}$. Σήμερα, θα ασχοληθούμε εντατικά με αυτό. Το καταλάβατε; Ναι; Γιατί το καταλάβατε; Επειδή το έχετε κάνει ήδη; Αυτό που θέλω να σας ρωτήσω, αφού το καταλάβατε, είναι πώς βγήκε αυτό. Αναγνωρίζετε κάτι διότι το έχετε δει ήδη. Αλλά πώς το αποδεικνύετε;

Άρα αρχίζουμε από κάτι το πιο απλό. Το θυμάστε αυτό $e^{2i\pi} = 1$;
Αφού όχι, πάμε ακόμα πιο απλά.
Θυμάστε αυτό: $e^{i\theta} = cos\theta + isin\theta$. Το πρώτο μέρος είναι του Leonhard Euler (1707-1783) και το δεύτερο μέρος είναι του Abraham de Moivre (1667-1754). Αν αυτό δεν σας λέει τίποτα, τότε σημαίνει ότι τα άλλα τρία που είδαμε τα ξέρετε παπαγαλία. Δηλαδή, σας είπαν ότι αυτά είναι έτσι. Κατά συνέπεια, φαντάζομαι ότι αυτό, $e^{i\pi} = -1$, δεν σας λέει τίποτα. Μπορεί να το θυμάστε, αλλά επειδή σας το έγραψαν όπως το έγραψα εγώ τώρα. Αυτό δεν σημαίνει ότι το καταλάβατε. Εμένα αυτό που με ενδιαφέρει για το μάθημα, είναι να ξέρετε πώς βγαίνει αυτό. Το πρώτο πράγμα που μπορείτε να δείτε είναι το θεώρημα του Moivre, που είναι πιο παλιά γραφή από αυτό που γράψαμε πριν.

Το θεώρημα του Moivre είναι το εξής: $(cos\theta + isin\theta)^n = cosn\theta + isinn\theta$.
Όπως καταλαβαίνετε, με τον Euler το πρώτο μέρος το μετατρέπετε σε $\left(e^{i\theta}\right)^n$ και το δεύτερο μέρος σε $e^{in\theta}$. Νομίζω ότι δεν διαφωνεί κανείς ότι αυτό του Euler είναι πιο συμπαθητικό και όμορφο, ενώ το άλλο είναι λίγο βαρύ. Ας το κοιτάξουμε όμως τουλάχιστον για μία φορά. Μπορούμε να το αποδείξουμε επαγωγικά.
Ας κοιτάξουμε τι γίνεται για $n = 2$.
Παίρνουμε το πρώτο κομμάτι και γράφουμε $(cos\theta + isin\theta)^2$ και μου το αναπτύσσετε υπολογιστικά. Τι βρίσκετε; Παρενθετικά, για όσους δεν το γνωρίζουν, το cos είναι το cosinus, δηλαδή το συνημίτονο και το sin είναι το sinus, δηλαδή το ημίτονο.
Άρα εδώ έχουμε: $(cos\theta + isin\theta)^2 = \cos^2\theta - \sin^2\theta + 2isin\theta cos\theta$.
Μέσω τριγωνομετρίας, αυτά έχουν ένα νόημα:
$\cos^2\theta - \sin^2\theta = cos2\theta$ και $2sincos\theta = sin2\theta$.
Άρα, τελικά αυτό γράφεται έτσι: $(cos\theta + isin\theta)^2 = cos2\theta + isin2\theta$.
Στην ουσία, ξαναβρίσκουμε τον τύπο του Moivre, μεγάλος Γάλλος μαθηματικός του Πολυτεχνείου της Γαλλίας, ο οποίος βρήκε για πρώτη φορά αυτόν τον τύπο, τον οποίο αποδεικνύουμε επαγωγικά.
Πώς κάνουμε μία απόδειξη με επαγωγή; Υποθέτουμε τι ισχύει για n. Κάναμε μέχρι τώρα για $n = 1$, για $n = 2$ και υπολογίζουμε για $n + 1$. Εδώ είναι ο υπολογισμός.
Άρα, γράφουμε: $(cos\theta + isin\theta)^{n+1}$.
Αυτό το σπάζω πολύ απλά και λέω ότι είναι ίσο με $(cos\theta + isin\theta)(cos\theta + isin\theta)^n$.
Η επαγωγή είναι αυτό το σχήμα: μελετάω δύο τρία πράγματα, υποθέτω και υπολογίζω. Από την υπόθεση ξέρω ότι το πιο πάνω γράφεται έτσι: $(cos\theta + isin\theta)(cosn\theta + isinn\theta)$. Για εσάς που απορείτε για το πώς παίρνουμε ως δεδομένο αυτό που θέλουμε να αποδείξουμε, το σκεπτικό είναι ότι υποθέτουμε ότι ισχύει για το n και θα αποδείξουμε ότι ισχύει και στο $n + 1$. Κοιτάξτε το νοητικό σχήμα: αν ένας τύπος είναι σωστός, θα είναι και ο επόμενος σωστός. Αν βρω ότι

μερικά είναι σωστά στην αρχή και υποθέσω ότι θα είναι σωστά και τα επόμενα και το συνεχίσω έτσι, αυτό τείνει στο άπειρο. Άρα, η απόδειξη με επαγωγή χρησιμοποιεί τη γνώση του θεωρήματος για το n, ως απλή υπόθεση, για να αποδείξει το $n+1$.
Άρα, τώρα απλώς πολλαπλασιάζω και έχω:
$(cos\theta cosn\theta - sin\theta sinn\theta) + i(sin\theta cosn\theta + cos\theta sin\theta)$.
Όταν έχω αυτό, το πρώτο κομμάτι είναι ένας τριγωνομετρικός τύπος:
$\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) = \cos(a+b)$.
Για το άλλο μέρος έχουμε το: $sinacosb + cosasinb = \sin(a+b)$.
Αυτοί οι τύποι είναι απλή τριγωνομετρία.
Άρα, εδώ έχω: $\cos(\theta + n\theta) + isin(\theta + n\theta)$.
Κατά συνέπεια έχω $\cos(n+1)\theta + isin(n+1)\theta$ ■
Αυτό είναι το σύμβολο του Paul Halmos που σημαίνει το τέλος μιας απόδειξης.

Αποδείξαμε, λοιπόν, το θεώρημα του Moivre. Αν εγώ σας πω ότι αυτό, $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$, μπορεί να γραφτεί έτσι $cos\theta + isin\theta$; Προς το παρόν, απλώς το αποδέχεστε. Δεν λέω ότι το αποδείξαμε. Απλώς το αποδεχόμαστε από αυτό που γράψαμε πριν:
$(cos\theta + isin\theta)^n = cosn\theta + isinn\theta$.

Τώρα, θέλω να εξετάσουμε γιατί έχω το δικαίωμα να το γράψω έτσι. Για να ξέρετε όλα αυτά που κάνουμε είναι μαθηματικά του 17ου αιώνα. Διδαχτήκατε αναπτύγματα Taylor; Θυμάστε ότι αυτό γράφεται έτσι;

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots, \ -\infty < x < \infty$$

Κάτι άλλο που σίγουρα κάνατε είναι αυτό: $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
Μετά από αυτό, αν θυμάστε καλά, σας δίδαξαν την εξίσωση εφαπτόμενης σε μία καμπύλη. Η εφαπτόμενη τι ήταν; Αν σβήσω το όριο και «πετάξω» το $x - x_0$ στο $f'(x_0)$ και ψάχνω την $f(x)$, την οποία ονομάζω y, τότε έχω:
$y = f'(x)(x - x_0) + f(x_0)$. Άρα έχω μία καμπύλη και ένα σημείο και κοιτάζω πώς είναι η εφαπτόμενη σε αυτό.

Επιστρέφω στην εξίσωση εφαπτομένης σε μία καμπύλη. Αυτό που δεν συνειδητοποιείτε είναι ότι αυτό είναι η αρχή του Taylor. Δηλαδή, μπορώ να το γράψω αλλιώς.
Μία συνάρτηση στο $x = x_0$ $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$ $+ \ldots$

τι είναι; Αυτή μοιάζει με κάποια που έχει ύψος και μετά μοιάζει με κάτι που είναι μία ευθεία και έχει μία κλίση. Για την καμπυλότητα στα κρίσιμα σημεία, κοιτάζαμε τη δεύτερη παράγωγο. Η πρώτη παράγωγος δεν μπορεί να μας πει αν η καμπύλη πάει από τη μία ή την άλλη πλευρά. Άρα, εμείς θα συνεχίσουμε στη δεύτερη παράγωγο. Όλο αυτό που κάνουμε δεν είναι εύκολο γιατί, όταν το σκεφτείτε, μόνο ο Euler το σκέφτηκε. Αυτός ο τύπος είναι το θεώρημα Taylor-Lagrange. Στο μάθημα της Ιστορίας και Φιλοσοφίας των Μαθηματικών αυτά τα ονόματα είναι γνωστά. Εδώ θα πούμε: για $x = 0$ έχουμε
$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + f'''(0)\frac{x^3}{3!} + \ldots$

Ο τύπος των Taylor-Lagrange μας επιτρέπει να κάνουμε μία προσέγγιση μιας καμπύλης. Άρα είναι προσέγγιση 1ου , 2ου και 3ου βαθμού. Γενικά, είναι μία ιδέα που είχε ήδη ο Newton που έλεγε ότι μπορούμε να κάνουμε οποιοδήποτε σύστημα καμπυλών να μοιάζει με πολυώνυμο. Λοιπόν, παίρνουμε μία καμπύλη *(και για) πρώτου βαθμού και κοιτάζω μόνο τη λύση. Δευτέρου βαθμού, κοιτάζω αν μοιάζει με παραβολή. Τρίτου βαθμού, κοιτάζω αν μοιάζει με κυβική. Τετάρτου βαθμού, κοιτάζω αν έχω διπλή καμπύλη. Τι γίνεται; Σιγά-σιγά καταλαβαίνετε ότι η προσέγγιση είναι όλο και καλύτερη. Δηλαδή, καταλαβαίνεις όλο και πιο καλά τη συνάρτηση, χωρίς όμως να γράφεις τη συνάρτηση, διότι σταματάς. Το θεώρημα του Lagrange $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0)$. Αυτό το κάνουμε για να το δείτε τουλάχιστον μία φορά, αλλά μη σας απασχολεί.

Ξέρετε ότι $(e^x)' = e^x$. Προσέξτε τι θα πω. Αν θέλω να εφαρμόσω την παράγωγο εδώ για το e^xγια $x = 0$ πόσο θα είναι; 1. Άρα, αν διαβάσω τον τύπο του Lagrange και τον πάω στο άπειρο, με το εκθετικό αυτό πάντα μου κάνει 1. Άρα μπορείτε να γράψετε ότι $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$. Αυτός είναι ένας πολύ ωραίος τύπος που σας εξηγεί πολλά πράγματα. Αν θυμάστε καλά, η εκθετική συνάρτηση είναι πάντα πιο δυνατή από το πολυώνυμο. Δηλαδή, αν έχετε πάνω εκθετική και κάτω πολυώνυμο, «νικάει» η εκθετική. Γιατί; Είναι πολύ απλό, γιατί η εκθετική πάει ως το άπειρο, ενώ τα πολυώνυμα είναι πεπερασμένα. Αυτό που έγραψα πριν, το έγραψα με ένα x που είναι γενικό. Αν τώρα γράψω έστω $x = i\theta$; Εδώ έχω δικαίωμα να το γράψω.

Άρα $e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!}$. Σκεφτείτε το καλά. Ξέρετε ότι το i όταν είναι στο 0 κάνει 1, όταν είναι στο 1 θα κάνει i, όταν είναι στο τετράγωνο μάς κάνει -1, άρα μπορώ να γράψω αυτό που έγραψα αρχικά, θα μου κάνει:

$$= 1 + i\theta - \frac{i\theta^2}{2} - \frac{i\theta^3}{6}.$$

Τι βλέπετε; Κάθε δύο υπάρχει ένα i, και κάθε δύο δεν υπάρχει. Άρα μπορείτε να γράψετε: $(1 - \frac{\theta^2}{2} + \cdots) + i(\theta - \frac{\theta^3}{6} + \cdots)$. Αυτόν τον υπολογισμό χρησιμοποιεί και ο Κωνσταντίνος Καραθεοδωρή στη μελέτη του για το τηλεσκόπιο του Schmidt. Άρα αυτή είναι η σχέση (1).

Ξέρουμε τώρα ότι $(cosx)' = -sinx$ και $(sinx)' = cosx$.

Αν θέλουμε να βρούμε τον τύπο του Taylor με αυτά τα στοιχεία θα είναι:

$$sinx = sin\theta + cos\theta x - \sin\theta\left(\frac{x^2}{2}\right) - cos\theta\left(\frac{x^3}{6}\right)$$

άρα, αν το απλοποιήσουμε, μας κάνει:

$sinx = 0 + x - 0 - \frac{x^3}{6} = x - \frac{x^3}{6}$.

Κανονικά αυτό μοιάζει με τη σχέση (1). Και μετά, κανονικά θα μας αποδείξει ότι $e^{i\theta} = cos\theta + isin\theta$ ■

Αυτό μας το αποδεικνύει ο Euler. Είναι πολύ σημαντικό γιατί ο Euler κατάφερε να πιάσει ένα κομμάτι του Moivre και να πιάσει μετά το Taylor-Lagrange μαζί με την ιδιότητα που έχουν τα sin και cos και το e, και να τα συνδυάσει έτσι ώστε μετά από ένα μεγάλο πράγμα που σας φαίνεται δύσκολο, ο Euler λέει ότι τελικά από όλα αυτό, εγώ θα θυμάμαι μόνο το $e^{i\theta} = cos\theta + isin\theta$.

Τώρα μπορούμε να κάνουμε θεωρία. Γιατί τώρα ξέρετε πάνω σε τι βασίζεται.

Δηλαδή, έχουμε $x^2 = 1$. Εσείς λέτε: $1^2 = 1$ και $(-1)^2 = 1$ εφόσον έχω εξίσωση δευτέρου βαθμού και έχω δύο λύσεις, τις έχω βρει όλες. Ενώ, λύνετε πρώτα την εξίσωση και αναρωτιέστε πόσες από αυτές τις λύσεις που θα βρείτε είναι πραγματικές.

Κοιτάξτε τώρα πώς θα το κάνουμε. Έχω το δικαίωμα, τώρα που το αποδείξαμε, να χρησιμοποιήσω αυτό: $e^{i0} = cos\theta + isin\theta$. Η ιδέα εδώ είναι -για να μπείτε στην ιδέα του Galois και της Θεωρίας Ομάδων- πώς να ξανακάνουμε μερικές πράξεις με τέτοιο τρόπο ώστε όταν αλλάξει η τάξη, να μπορούμε πάλι να το κάνουμε. Άρα, εδώ έστω ένα x, αλλά έτσι όπως οι μιγαδικοί είναι πιο πλούσιοι δεν μας πειράζει να δουλέψουμε με αυτούς γιατί πιάνουν και τους πραγματικούς. Άρα λέω έστω $x = e^{i\theta}$.

Και κοιτάξτε τι κάνω: $\left(e^{i\theta}\right)^2 = 1$

Στην ουσία, θα πρέπει να βρω το θ. Εδώ, έχω το δικαίωμα να το κάνω. Και μετά, ας πούμε ότι δεν μπορώ να το δουλέψω μέσω Euler γιατί δεν είμαι εξοικειωμένος, λέω ότι μέσω του Moivre, $\left(e^{i\theta}\right)^2 = 1$ είναι :

$(cos0 + isin0)^2 = 1 \Leftrightarrow cos20 + isin0 = 1 = 1 + 0i$

Κατά συνέπεια εδώ έχω το δικαίωμα να κάνω ταυτότητα. $cos2\theta = 1$ $isin2\theta = 0$. Ποια γωνία μάς κάνει 1 στο cos; Η $\kappa\pi$.

$2\theta \equiv 2\kappa\pi$

$0 \equiv \kappa\pi.$

Τώρα με αυτό που κάναμε θα μπορώ να γράψω όπου 2 το *n* και να κάνω ακριβώς το ίδιο. Εδώ είναι το εντυπωσιακό. Δηλαδή εδώ είπαμε ότι είναι:

θ ≡ κπ

Για την ακρίβεια είναι:

θ ≡ $\frac{2\kappa\pi}{2}$

διότι το πάνω 2 πρέπει να υπάρχει επειδή θα μένει πάντα, ενώ το κάτω 2 θα γίνει *n*. Εδώ τυχαία γίνεται 2 αυτό το *n*. Άρα, κοιτάξτε τώρα πώς το κάνουμε – αυτή είναι πραγματικά μεγάλη μεθοδολογία του τύπου Galois – γιατί έχετε την εντύπωση ότι κάναμε μόνο ηλίθια πράγματα και τώρα βλέπετε ότι βάζω *n*.

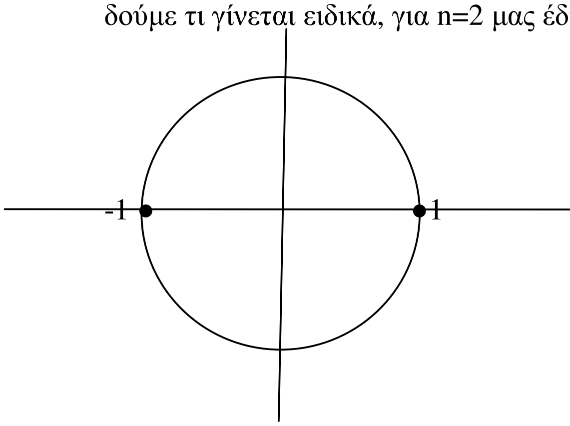
$$\left(e^{i\theta}\right)^n = 1$$

$$(cos\theta + isin\theta)^n = 1 \Leftrightarrow cosn\theta + isinn\theta = 1$$

Άρα:

$$\begin{cases} cosn\theta = 1 \\ isin\theta = 0 \end{cases}$$

Και εγώ τώρα ξέρω να λύνω $x^n = 1$. Και όχι μόνο ξέρω να λύνω, ξέρω και ποιες είναι. Άρα τώρα θα είναι –αυτό να το θυμάστε σαν σχήμα, διότι είναι πολύ σημαντικό– γιατί είναι πολύ σημαντικό να μπορείτε να κάνετε τον ηλίθιο, ηλίθιος μέσα στο μάθημα είναι ο έξυπνος χωρίς γνώσεις. Δηλαδή εσείς είστε έξυπνοι αλλά δεν ξέρετε ότι η λύση από αυτό ($x^2 = 1$) είναι 1 και -1. Οπότε κάνουμε σαν ηλίθιοι και βλέπουμε μετά τι μας δίνει αυτό. Προσέξτε, αν θέλουμε να το κοιτάξουμε και να δούμε τι γίνεται ειδικά, για n=2 μας έδινε θ ≡ κπ. Το κπ είναι εδώ:



άρα αν το κ είναι περιττός ή άρτιος θα «χοροπηδάει» στο 1 και το -1. Άρα εδώ έχουμε βρει ένα θ που είναι δύο φορές άπειρο, αλλά που σταθεροποιείται σε δύο σημεία τα οποία είναι -1 και 1. Είναι αυτά που ξέραμε όταν ήμασταν έξυπνοι. Τώρα το κάνουμε n=3. Οπότε βρίσκω το 1 που είπαμε, το $e^{\frac{2i\pi}{3}}$, το γράφω κατευθείαν εδώ απλώς βάζοντας όπου κ=1 και το δεύτερο θα είναι $e^{\frac{4i\pi}{3}}$. Οπότε:

$e^{\frac{2i\pi}{3}}$ είναι ο j και

$e^{\frac{4i\pi}{3}}$ είναι ο $\bar{j}$, δηλαδή ο συζυγής του j .

Άρα εδώ βρήκαμε ένα τέχνασμα αν θέλετε που είμαστε λίγο πιο κάτω, λίγο πιο πριν από την καθαρά εφαρμογή της Θεωρίας Ομάδων, διότι εδώ δεν έχουμε συνειδητοποιήσει κάτι που είναι πολύ σημαντικό, είναι ότι αυτά τα τρία στοιχεία λειτουργούν σαν ομάδα. Βέβαια είναι λογικό γιατί δεν έχουμε πει ακόμη τι είναι μία ομάδα. Αλλά αυτό που λέγαμε τώρα είναι ότι κάναμε δήθεν ότι δεν ξέραμε, βρήκαμε μία πολύ δυνατή μεθοδολογία και τώρα μπορώ να σας πω ότι εδώ έχουμε τρία στοιχεία της Θεωρίας Ομάδων αλλά δεν έχουμε δει ακόμη την ομάδα, αλλά είναι ήδη εδώ. Άρα ο Galois θα κάνει μία τεχνική όπου όταν θα έχει μία εξίσωση, θα προσπαθεί να βρει στοιχεία και να δει αν αυτά τα στοιχεία αποτελούν ομάδα. Μόλις αποτελούν ομάδα, θα μπορούμε να το λύσουμε με την έννοια της τετραγωνικής ρίζας. Αν δεν έχουμε ομάδα, ξεχάστε το. Αυτό θα το δούμε σιγά-σιγά. Τώρα θα δούμε μια ένδειξη πολύ απλή η οποία είναι η εξής:

Τώρα είμαστε στο 3. Βρήκαμε ότι το 3 έχει τρεις λύσεις: την 1, την j και την $\bar{j}$.

Κοιτάξτε τι μπορώ να κάνω:

$$1^2 = 1 \left| \begin{matrix} j^2 = \bar{j} \\ \text{ομοίως} \left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^2 = e^{\frac{4i\pi}{3}} \end{matrix} \right.$$

$$1^3 = 1 = j^3 = j^2\, j = \bar{j}\, j = |j|^2 = 1$$

Το $\bar{j}$ γίνεται:

$$\bar{j}^3 = 1 \left[\left(e^{\frac{4i\pi}{3}}\right)^3 = e^{4i\pi} = 1\right]$$

$$1^3 = j^3 = \bar{j}^3 = 1$$

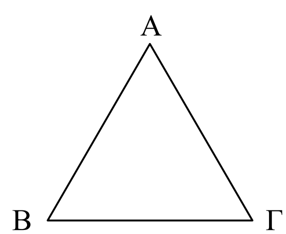
Βέβαια εγώ αν και υποτίθεται ότι δεν το γνωρίζω ακόμα, τυχαία θα το ονομάσω αυτό Z_3 και θα πω ότι αυτή η ομάδα χαρακτηρίζεται από το ότι όταν ένα στοιχείο ανήκει σε αυτή, αυτό σημαίνει ότι αυτό το στοιχείο στη $3^{η}$ κάνει 1:

$x \in Z_3 \Leftrightarrow x^3 = 1$

Θ.Ο $\Leftrightarrow$ Θ.Εξ

Εγώ έκανα όλο αυτό για να κάνω αυτή την ισοδυναμία. Τώρα αν σβήσω όλα τα προηγούμενα και κρατήσω αυτό, θα είμαι στη Θεωρία Ομάδων. Πιο πάνω ήμουν στη θεωρία εξισώσεων. Ανάμεσά τους έχω την ισοδυναμία. Άρα η ιδέα είναι ότι κάνω εξισώσεις, βρίσκω λύσεις και ψάχνω να βρω μια ιδιότητα που έχουν όλες οι λύσεις.

Εδώ βλέπουμε ότι παρόλο που γράφονται έτσι ή αλλιώς, που έχουν κάποιες ιδιότητες και κάποιες άλλες δεν τις έχουν, στο τέλος έχουμε όλες τις ρίζες. Και επιπλέον όπως το 3 είναι πρώτος αριθμός, εδώ υπάρχει μόνο μία ομάδα που να κάνει αυτό το πράγμα. Εδώ αν είχα ένα 6, θα μπορούσατε να πείτε ότι είναι $(x^2)^3$ ή $(x^3)^2$, άρα θα ήταν Z_2 , Z_3 . Ή θα μπορούσε να ήταν Z_6 . Αυτό βέβαια δεν θα το δούμε ακόμα, απλώς εδώ σας έδειξα πώς μπορούμε να πάρουμε τα πρώτα στοιχεία μιας ομάδας. Αυτές εδώ οι ομάδες λέγονται κυκλικές. Άρα η Z_3 είναι κυκλική ομάδα τάξης 3. Εδώ προς το παρόν σας κάνω εισαγωγή στη Θεωρία Ομάδων χωρίς να έχετε τα αξιώματα. Είναι απλώς για να έχετε μία εικόνα. Η Θεωρία Ομάδων εδώ πώς εμφανίζεται; Έχετε το 1 και έχετε ένα ισόπλευρο τρίγωνο. Πόσες μεταθέσεις μπορείτε να κάνετε χοροπηδώντας πάνω στο τρίγωνο ΑΒΓ;

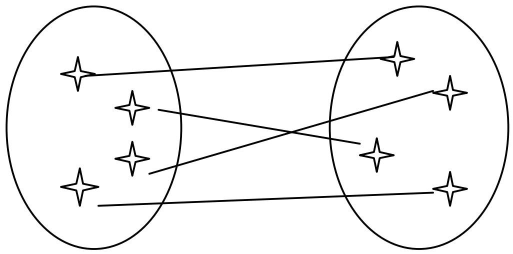


Μπορεί να κάνει δεξιόστροφη, αριστερόστροφη ή συμμετρικές σε άξονες με ένα σημείο σταθερό και τα άλλα δύο να αλλάζουν θέση μεταξύ τους.

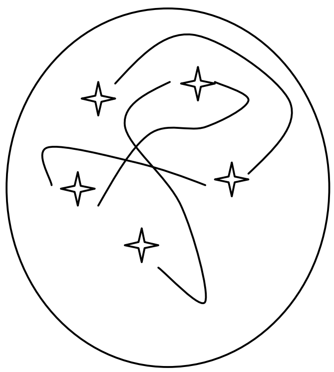
Η «Θεωρία Galois»

Οι μαθηματικοί για μεγάλο χρονικό διάστημα χρησιμοποιούσαν τύπους οι οποίοι περιλάμβαναν μόνο ρητές πράξεις και ριζικά για την επίλυση εξισώσεων μέχρι και $4^{ου}$ βαθμού. Το 1824 ο Νορβηγός μαθηματικός Niels Abel έδωσε μια απόδειξη της μη επιλυσημότητας με ριζικά της γενικής εξίσωσης $5^{ου}$ βαθμού. Ο Galois, που αρχικά δεν είχε ενημερωθεί για το έργο του Abel, ανέπτυξε μια θεωρία που έριχνε φως στις βασικές συνθήκες που πρέπει να ικανοποιεί μια εξίσωση για να επιλύεται με ριζικά. Η μέθοδός του συνίστατο στην ανάλυση των επιτρεπτών μεταθέσεων των ριζών της εξίσωσης. Δηλαδή σχημάτισε αυτό που σήμερα αποκαλούμε ομάδα αυτομορφισμών (μια ειδική περίπτωση μετασχηματισμού) του σώματος που προκύπτει επισυνάπτοντας τις ρίζες της εξίσωσης στο σώμα των συντελεστών της. Η βασική του ανακάλυψη ήταν ότι η επιλυσιμότητα με ριζικά είναι δυνατή αν και μόνο αν η ομάδα αυτομορφισμών είναι επιλύσιμη, το οποίο σημαίνει ότι η ομάδα μπορεί να αναλυθεί σε παράγοντες που η τάξη τους είναι πρώτος αριθμός, οι οποίοι παράγοντες έχουν πάντοτε μια ευκολονόητη δομή. Έτσι ο Galois αντιλήφθηκε ότι η επίλυση εξίσωσης $5^{ου}$ και ανώτερου βαθμού απαιτούσε μια εντελώς διαφορετική αντιμετώπιση από αυτή που απαιτούνταν για εξισώσεις $2^{ου}$, $3^{ου}$ και $4^{ου}$ βαθμού.

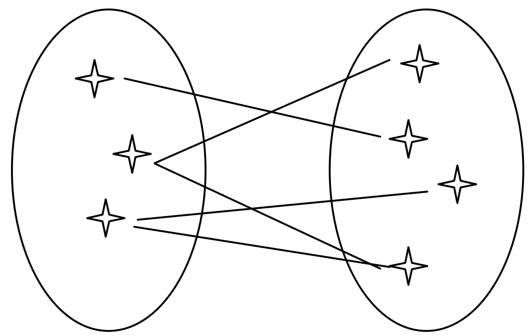
Οι αυτομορφισμοί είναι ισομορφισμοί στο ίδιο σύνολο:



Ισομορφισμός



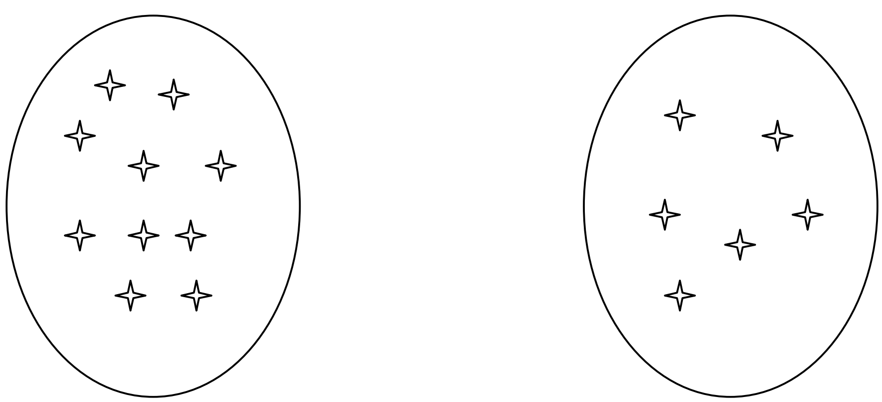
Αυτομορφισμός



Μορφισμός

Τώρα κανονικά θα λέτε: όλα αυτά για να γίνουμε εμείς δάσκαλοι; Σας φαίνεται κάπως υπερβολικό. Επειδή ασχολούμαι και με παιδιά που είναι προικισμένα και με παιδιά που είναι με ειδικές ανάγκες, άρα κάνουμε και ειδική αγωγή, σας δίνω ένα παράδειγμα:

Έστω ότι είμαι ένα παιδί με ειδικές ανάγκες. Με ρωτάνε η $1^{η}$ σακούλα έχει περισσότερους σταυρούς ή η δεύτερη;



Ο δάσκαλος θεωρεί ότι ο μαθητής θα τα μετρήσει και θα το βρει. Ωστόσο εγώ λέω:

Ένα, ένα, ένα, ένα, ένα… ένα για το πρώτο και ένα, ένα, ένα, ένα, ένα, ένα για το δεύτερο.

–Είναι το ίδιο κύριε, είναι ένα.

Βλέπετε εδώ έχετε ένα μικρό πρόβλημα, έχετε ξεχάσει ότι ο εγκέφαλός μας κάνει την μέτρηση μετά. Άρα αν βάλετε ένα παιδί που δεν μπορεί να κάνει τη μέτρηση, δεν μπορεί να βρει ποιο είναι το μεγαλύτερο από το άλλο. Άρα λέμε στο παιδί:

Πάρε ένα σταυρό και βάλε τον πάνω σε ένα σταυρό της άλλης σακούλας. Κάνε το ίδιο με τον άλλο. Όσο μπορείς το κάνεις. Και τα παιδιά το κάνουν. Αυτό λέγεται αντιστοίχιση. Και λέμε στο παιδί: άμα εδώ έχεις ένα σταυρό (γιατί δεν ξέρει να βρει πολλούς), που δεν έχει γραμμή προς τα άλλα, αυτός είναι ο μεγαλύτερος. Σκεφτείτε τώρα τι έχετε κάνει. Το παιδί είναι ικανό να σας πει ότι η αριστερή σακούλα έχει περισσότερους από τη δεξιά χωρίς να ξέρει πόσοι είναι. Άρα απαντάει στην ίδια ερώτηση που απαντούσατε εσείς, αλλά εσείς μετράτε ενώ αυτός κάνει αντιστοίχιση. Ο ισομορφισμός που σας μαθαίνει, είναι κάτι που είναι πιο βαθιά στον εγκέφαλο των παιδιών, που οι δάσκαλοι δεν το ξέρουν. Σε αυτό το μάθημα, θα κάνουμε πράγματα που έχουν άμεσες εφαρμογές στα παιδιά, παρ' ότι δεν φαίνονται αμέσως, εγώ θα τα λέω κάπου-κάπου. Αυτό που σας είπε με τη λέξη αυτομορφισμός, ισομορφισμός και λέτε «ο θεός να μας φυλάει», βλέπουμε πως αυτό που κάνει το παιδί που έχει νοητική υστέρηση είναι ισομορφισμός. Στην ουσία, προσπαθεί να βρει αν υπάρχει ισομορφισμός, γιατί αν υπάρχει, σημαίνει πως όσα είναι στη πρώτη, είναι και στη δεύτερη. Ο αυτομορφισμός είναι όταν βάζουμε το ένα στη θέση του άλλου μέσα στο ίδιο σύνολο. Τώρα θα μου πείτε, τι σχέση έχει ο ισομορφισμός με τα παιδιά; Καθρέφτες. Ο αυτομορφισμός είναι ότι όταν το παιδί κοιτάζει, καταλαβαίνει ότι είναι ο εαυτός του. Να ξέρετε ότι μόνο ο άνθρωπος και ο πίθηκος είναι ικανοί να κάνουν αυτομορφισμό. Δηλαδή αν λερωθεί στο κεφάλι και κοιτάξει στον καθρέφτη, ο πίθηκος θα σκουπιστεί με το άκρο του. Η γάτα δεν κάνει τίποτα, νομίζει ότι είναι άλλη γάτα. Το παιδάκι, στην αρχή, όταν βλέπει τον εαυτό του στον καθρέφτη, φοβάται και νομίζει ότι είναι άλλο παιδάκι. Όταν θα περάσει τους 8 μήνες θα το καταλάβει. Αυτό είναι ένα παράδειγμα γνωστικού αυτομορφισμού. Δηλαδή κάνουμε τον ισομορφισμό και μετά αντιλαμβανόμαστε ότι δεν είναι ισομορφισμός πάνω σε ένα άλλο αντικείμενο, αλλά στο δικό μας.

Ισομορφισμός είναι ένας ομορφισμός στον εαυτό του.

Ομορφισμός:

Έστω $(G, \cdot)$ και $(G, \bullet)$ με $x,y \in G$

Αν ισχύει ότι:

$F(x\cdot y)=f(x)\bullet f(y)$

Παράδειγμα:

$\ln(x\cdot y)=\ln x + \ln y$

έχω βρει μια συνάρτηση, το λογάριθμο, που μετατρέπει τον πολλαπλασιασμό σε ένα χώρο και το άθροισμα σε έναν άλλο χώρο σε μία ισότητα. Οπότε λέει πως όταν θα είσαι στο πρώτο και θα κάνεις πολλαπλασιασμό θα είναι το ίδιο με το να είσαι στο δεύτερο και να κάνεις άθροισμα. Αλλά αυτό σημαίνει πως διατηρούμε τις ίδιες ιδιότητες. Αυτό είναι ένα παράδειγμα ομορφισμού. Όπως ας πούμε όταν έχει

$x^{\alpha+\beta}=x^{\alpha} \cdot x^{\beta}$, όμως αριστερά έχετε μία ομάδα που δρα στους εκθέτες και δεξιά μία ομάδα που δρα στα στοιχεία. Και λέμε ότι η ομάδα που δρα στου εκθέτες με το + είναι στην πραγματικότητα μία άλλη ομάδα που δρα στα στοιχεία με το $\cdot$. Άρα εδώ έχουμε μία συμβατότητα. Και αυτή η συμβατότητα με την πρώτη και τη δεύτερη ομάδα για να πούμε πως λειτουργούν, θα πρέπει να έχουμε ομομορφισμό.