Sur la contribution de W. Pauli

à la théorie des matrices de P.A.M. Dirac

N. Lygeros

<u>Théorème fondamental</u> : Si γ^{μ} et $\dot{\gamma}^{\mu}$ sont deux systèmes de matrices à quatre lignes et quatre colonnes qui satisfont tous les deux aux même relations

$$\frac{1}{2}\left(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}+\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\right)=\delta_{\mu\nu},\ \frac{1}{2}\left(\dot{\gamma}^{\mu}\dot{\gamma}^{\nu}+\dot{\gamma}^{\nu}\dot{\gamma}^{\mu}\right)=\delta_{\mu\nu}$$

il existe une matrice S non singulière satisfaisant la relation : $\dot{\gamma}^{\mu}=S\gamma^{\mu}S^{-1}$ Comme le précise W. Pauli dans l'introduction de son étude de la théorie des matrices de P.A.M. Dirac, ce théorème se trouve dans le livre de B.L. van der Waerden intitulé

Die Gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik.

L'approche de ce dernier, comme l'indique le titre de son ouvrage utilise la théorie des groupes et la démonstration de ce théorème résulte d'une démonstration plus générale. Le point de vue de W. Pauli est radicalement différent puisqu'il recherche une démonstration élémentaire qui n'utilise pas la présentation matricielle de groupes finis. Evidemment, il souhaite par ce biais, trouver une démonstration plus accessible aux physiciens. Dans tous les cas, il montre indirectement la puissance de la théorie des groupes et l'élégance de l'algèbre de Clifford. L'approche de W. Pauli lui permet d'établir de manière algébrique, une correspondance ente les fonctions d'ondes de Dirac à énergie positive et celles à énergie négative. Cette correspondance était connue de L. de Broglie comme le prouve son ouvrage *Une nouvelle conception de la lumière* mais uniquement avec la spécialisation numérique des matrices de Dirac. Ainsi W. Pauli considère le système de 16 nombres hypercomplexes qu'il note :

$$\begin{array}{cccc}
I & & & \\
\gamma^1 & \gamma^2 & \gamma^3 & \gamma^4 \\
I\gamma^2\gamma^3 & I\gamma^3\gamma^1 & I\gamma^1\gamma^2 & I\gamma^1\gamma^4 \\
I\gamma^1\gamma^2\gamma^3 & I\gamma^1\gamma^2\gamma^4 & I\gamma^3\gamma^1\gamma^4 & I\gamma^2\gamma^3\gamma^4 \\
\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4 & & &
\end{array}$$

$$I\gamma^2\gamma^4 \quad I\gamma^3\gamma^4$$

Une des conséquences de la relation $\dot{\gamma}^{\mu}=S\gamma^{\mu}S^{-1}$ est le lemme suivant : **Lemme** : Le produit de deux éléments γ^{A} et γ^{B} est toujours égal à un troisième élément γ^C, à un facteur numérique près ε_{AB} qui peut être égale à ±1, ±i, i.e $\gamma^A\gamma^B = \varepsilon_{AB}\gamma^C$.

En réalité cette propriété est aisément interprétable comme l'action d'un groupe multiplicatif de l'algèbre de Clifford. Il en est de même pour le lemme suivant :

Lemme : Si dans le produit $\gamma^A\gamma^B, \gamma^A$ est fixe et γ^B parcourt tout le système des 16 éléments, γ^C défini par l'équation $\gamma^A\gamma^B = \varepsilon_{AB}\gamma^C$ parcourt ainsi tout le système des 16 éléments.

De plus comme les matrices γ^A sont linéairement indépendantes, il est possible de créer un espace vectoriel avec les outils de l'algèbre linéaire sans passer par la théorie des groupes. Ensuite la méthode de J. Schur permet de démontrer le théorème fondamental de manière élémentaire.