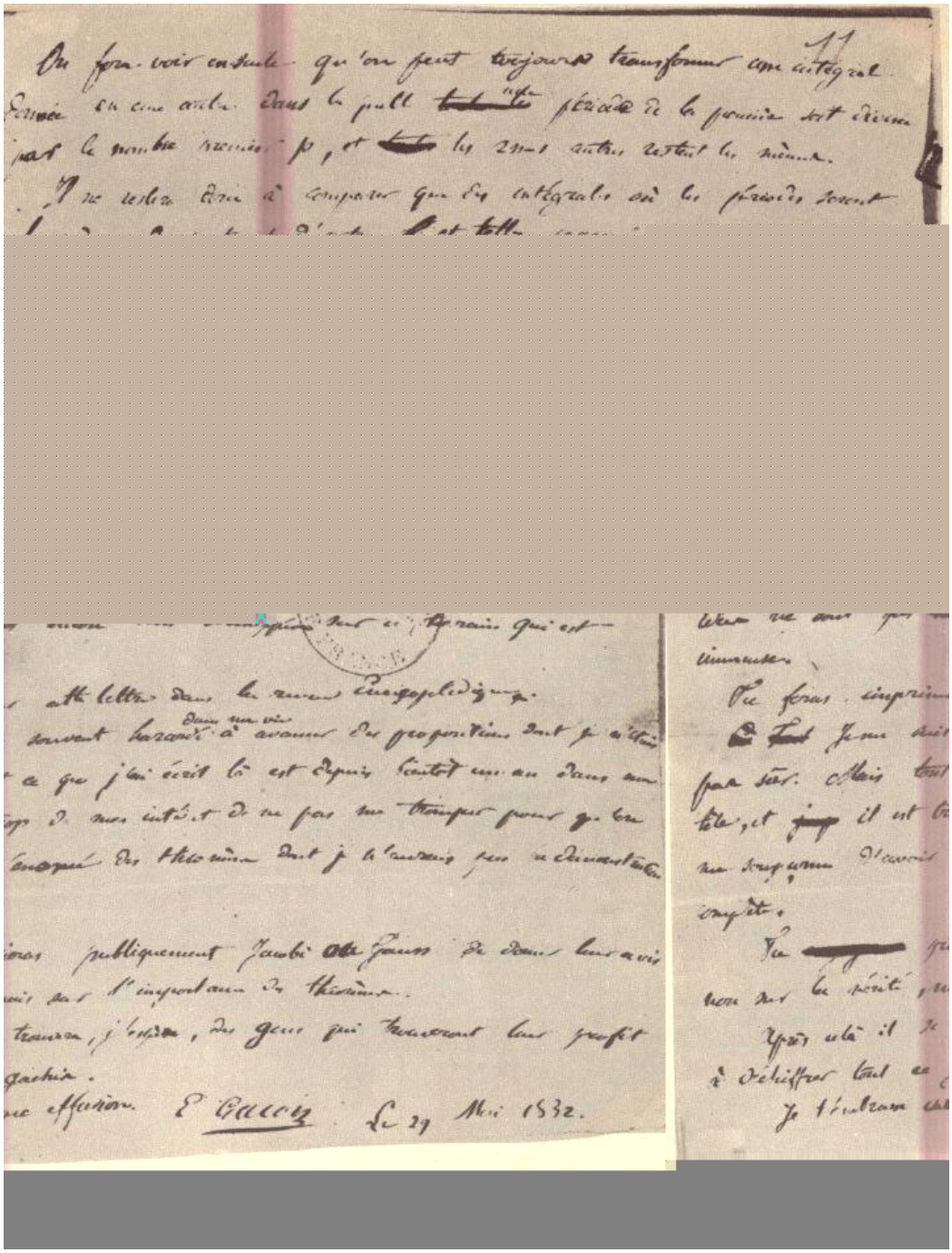
Μελέτη των χειρογράφων του Galois.
Etude des manuscrits de Galois.
Νίκος Λυγερός

Αυτά είναι τα χειρόγραφα του Galois.

Είμαστε σε αυτή τη σελίδα:



Κάτω, στην προτελευταία και τελευταία παράγραφο, λέει:

Tu prieras publiquement Jacobi ou Gauss, de donner leur avis non sur la vérité, mais sur l' importance du théorème.

Après celà il se trouvera, j'éspère, des gens qui trouveront leur profit à déchiffrer tout ce gachis.

Je t'embrasse avec effusion.
E. Galois
Le 29 Mai 1832

Έχω την αίσθηση ότι κάνω μάθημα στο Πανεπιστήμιο της Γαλλίας! Στα ελληνικά λέει: «Θα ζητήσεις από τον Jacobi ή Gauss...» Το πρώτο ρήμα που χρησιμοποιεί είναι το prier που κανονικά σημαίνει ικετεύω, αλλά εδώ είναι μια λόγια έκφραση για να ζητήσεις κάτι. «...publiquement», public είναι το κοινό. Το λέει με την έννοια μιας επίσημης ανοιχτής επιστολής. Άρα, «Θα ζητήσεις ανοιχτά από τον Jacobi ή τον Gauss να δώσουν τη γνώμη τους όχι πάνω στην αλήθεια, αλλά στη σημαντικότητα του θεωρήματος.» Απίστευτο δεν είναι; Δηλαδή, αυτός ο μικρός ξέρει ότι το θεώρημα είναι σωστό. Το θέμα για αυτόν δεν είναι αν είναι σωστό ή όχι το θεώρημα. Το θέμα είναι αν κατάλαβαν οι άλλοι πόσο σημαντικό είναι. Η τελευταία παράγραφος λέει: «Μετά από αυτό θα βρεθούν, εύχομαι, άτομα που θα βρουν όφελος να αποκρυπτογραφήσουν...» «...ce gachis» είναι κάτι το χαμένο, κάτι που δεν είναι καλά γραμμένο, κάτι που είναι πρόχειρο. Το πρόχειρο στα γαλλικά είναι brouillon, αλλά δεν το χρησιμοποιεί. Χρησιμοποιεί τη λέξη gachis που σημαίνει κάτι που θεωρούμε ανούσιο. Έχει ενδιαφέρον να το διαβάζουμε αυτό το 2008 και να είμαστε ακριβώς αυτοί οι άνθρωποι που μπορεί να βρουν ένα όφελος διαβάζοντας τα χειρόγραφά του. Μερικές φορές σας λέω να είστε προσεκτικοί γιατί έχετε μια τάση να αναλύετε τα γεγονότα του παρελθόντος σαν να μην έχουν καμία σχέση με το τι γίνεται τώρα. Ένας από εσάς δεν είναι έτσι, βλέπει περισσότερα. Έχουμε αυτά τα χειρόγραφα και δεν τα έχει διαβάσει κανένας. Τι θα κάνατε με αυτά τα χειρόγραφα; Ποια είναι η δουλειά σας; Από παιδαγωγική, μαθηματική, καλλιτεχνική άποψη. Υπάρχουν πολλά πράγματα που υπάρχουν σε αυτά τα χειρόγραφα. Αν είχατε μόνο αυτά; Φανταστείτε ένα παιδί που έρχεται και σας δείχνει μόνο αυτό το πράγμα.

Συνεχίζουμε στο χειρόγραφο. Στην τρίτη από το τέλος παράγραφο λέει:

Tu feras imprimer, cette lettre dans la revue Encyclopédique.
Je me suis souvent hasardé dans ma vie à avancer des propositions dont je n'étais pas sûr. Mais tout ce que j'ai écrit là est depuis bientôt un an dans ma tête et il est trop de mon intérêt de

ne pas me tromper pour qu'on me soupçonne d'avoir énoncé du théorème dont je n'aurais pas une démonstration complète.

Είναι καλή εξάσκηση και για αποκρυπτογράφηση.

Λέει λοιπόν:

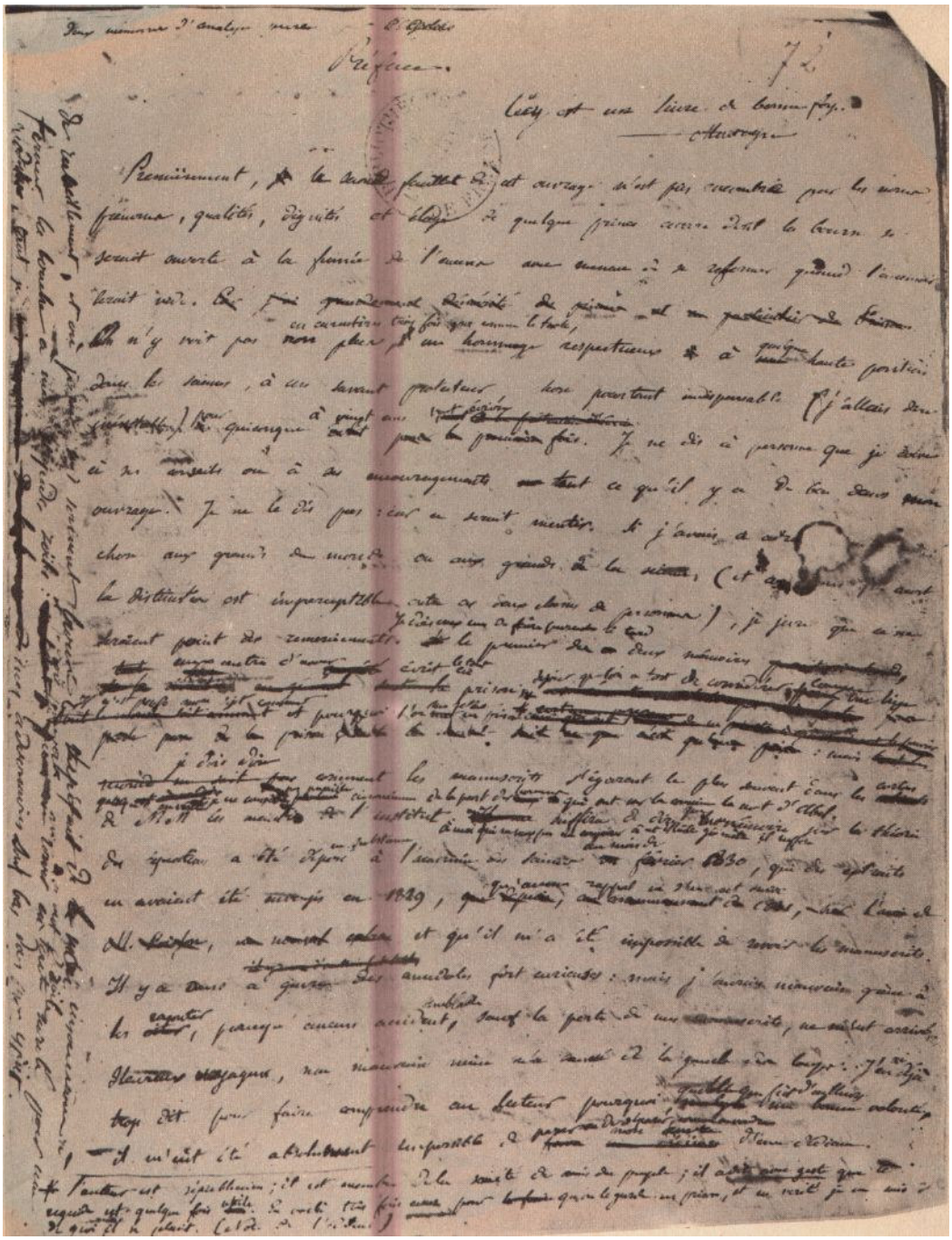
«Θα ζητήσεις να εκτυπωθεί αυτό το γράμμα στο Εγκυκλοπαιδικό [εφημερίδα, περιοδικό].

Πολύ συχνά στη ζωή μου, μου έτυχε να μιλήσω για προτάσεις για τις οποίες δεν ήμουν σίγουρος. Αλλά όλα αυτά που έγραψα εδώ, είναι εδώ και σχεδόν ένα χρόνο στο κεφάλι μου και έχει πάρα πολύ σχέση με το όφελος μου να μην κάνω λάθη για να μην εικάζουν ότι διατύπωσα ένα θεώρημα για το οποίο δεν έχω πλήρη απόδειξη.»

Μιλάει με πάρα πολύ μεγάλη ειλικρίνεια. Είναι αφάνταστο. Σε ποιον γράφει; Λίγο πιο πάνω λέει στο γράμμα: «…mon cher Auguste…». Άρα, αυτό το γράμμα πρόκειται για την επιστολή, την οποία ονομάζουμε Κληρονομιά του Galois. Είναι η τελευταία που έχουμε. Εδώ έχουμε μόνο την τελευταία σελίδα, μπορούμε να βρούμε ολόκληρη την επιστολή. Άρα, τη διαβάζουμε σιγά-σιγά για να την αποκρυπτογραφήσουμε και να δούμε τη σημαντικότητα της. Είναι σπάνιο να έχετε έναν μαθηματικό ο οποίος να σκέφτεται, να γράφει και να καταγράφει αυτό που σκέφτεται. Για παράδειγμα, στη μουσική, όταν διαβάζεις μια παρτιτούρα, σπάνια θα έχεις τον μουσικό να σου λέει ότι σε εκείνο το σημείο έβαλε εκείνη τη νότα για συγκεκριμένο λόγο. Έχεις μόνο την παρτιτούρα. Δηλαδή μόνο το αποτέλεσμα. Όταν διαβάζεις Bourbaki, βλέπεις ότι έχουν μελετήσει μερικά έργα από προηγούμενους μαθηματικούς και έχουν δει ότι εμφανίζονται οι ίδιες αποδείξεις στο ίδιο κείμενο, οι οποίες ενισχύονται. Οι Bourbaki τι κάνουν; Παίρνουν το πιο γενικό θεώρημα και το βάζουν πρώτο. Άρα, εσύ δεν έχεις καθόλου πρόσβαση στο πώς δημιουργήθηκε. Δεν έχεις το ιστορικό, το παρελθόν. Άρα είναι πολύ σημαντικό να έχουμε την τύχη να έχουμε αυτό το πράγμα.

Μελέτη των χειρογράφων του Galois.

Σε αυτό το χειρόγραφο βλέπουμε τη λέξη *Préface*, δηλαδή *Εισαγωγή*.



Επίσης, βλέπουμε ότι η γραφή του είναι πιο πυκνή, άρα είναι σε αρχικό στάδιο, ενώ στο πρώτο είναι πιο αραιή, άρα βιάζεται περισσότερο.

Ας κοιτάξουμε ακόμα στο προηγούμενο χειρόγραφο. Βλέπετε ότι επάνω λέει:

Εδώ δεν ξέρουμε τίποτα. Ας πούμε ότι έχουμε μόνο αυτό.

Θυμάστε ότι ο da Vinci έχει γράψει 13.000 φυλλάδια και σώζονται μόνο 6.000. Τι να κάνουμε; Μερικές φορές μπορεί να είναι μόνο το ένα κομμάτι. Εδώ, προς το παρόν, λέμε ότι δεν το ξέρουμε εμείς. Γιατί, προσέξτε! Πρέπει να μπείτε στη νοητική διάθεση του ανθρώπου που το διαβάζει για πρώτη φορά. Κάποιοι από εσάς είναι στο τέλειο πλαίσιο, διότι δεν ξέρουν το κείμενο, δεν ξέρουν ακριβώς τον Galois, έχουν κάνει Ιστορία και Φιλοσοφία των μαθηματικών, κάνουν Θεωρία Ομάδων αλλά δεν ξέρουν ακόμα ακριβώς, κατά συνέπεια αυτό είναι το ιδανικό πλαίσιο, το οποίο είναι μια καλή αναπαράσταση του τι μπορεί να γίνει αν κάποιος εκείνη την εποχή έβρισκε αυτά τα πράγματα και ήθελε να κάνει κάτι με αυτά. Εσείς, προσωπικά, τι θα κάνατε με αυτά; Ειλικρινά. Εγώ νομίζω ότι θα τα πετάγατε.

- Αυτό δεν είναι αναγκαίο. Μπορεί κάτι να μας δημιουργούσε ένα ερέθισμα και να μην τα πετούσαμε.

Εμείς έχουμε τέσσερα. Αν είχες δικαίωμα να κρατήσεις μόνο ένα από τα τέσσερα, ποιο θα διάλεγες; Θα πετούσες τα άλλα τρία;

- Δεν θα τα πετούσα.

Έχεις δικαίωμα να κρατήσεις μόνο ένα.

- Γιατί να τα πετάξω;

Γιατί είναι οι κανόνες του παιγνίου.

- Έχουμε δικαίωμα να τα μοιραστούμε;

Ναι, θα μπορούσε.

- Τότε θα πάρει ο καθένας από ένα!

Κι αν δεν ήσασταν τέσσερις; Τι θα κάνατε;

- Θα μπορούσαμε να κρατήσουμε τους τύπους;

Ξεχνάτε ένα πράγμα. Στην επόμενη παράγραφο λέει: «Αυτά τα ερωτήματα δεν ήταν τα μόνο που είχα ερευνήσει. Οι κυριότεροι στοχασμοί μου εδώ και καιρό ήταν κατευθυνόμενοι προς την εφαρμογή της υπερβατικής ανάλυσης και της θεωρίας της απροσδιοριστίας. Πες ότι εσείς κρατάτε μόνο τους τύπους. Άρα αυτό το πετάτε. Ξεχνάτε το θέμα της εποχής. Εκείνη την εποχή γράφουν πολλά μαθηματικά με λόγια. Μην το βλέπετε έτσι όπως το συμπιέζουμε εμείς και μετά εξηγούμε με μία παράγραφο τι σημαίνει το κάθε σύμβολο. Εδώ μας λέει κάποια πράγματα τα οποία μας βοηθούν να καταλάβουμε καλύτερα αυτά που είναι γραμμένα με τύπους. Γιατί το πρόβλημα με τους τύπους είναι ότι προσφέρουν πολύ συμπυκνωμένη γνώση. Άρα πώς αποσυμπιέζεις χωρίς να ξέρεις; Το κείμενο είναι αυτό που αποσυμπιέζει. Αν δεν το έχεις, πώς να καταλάβεις τι λέει ο τύπος;

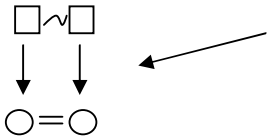
Η επόμενη παράγραφος είναι καθαρά θεωρία ομάδων σαν νοητικό σχήμα. Λέει λοιπόν: «Πρέπει να δούμε *a priori* -εκ των προτέρων- αν σε μία σχέση υπάρχουν ποσότητες ή συναρτήσεις υπερβατικές, ποιες ανταλλαγές θα μπορούμε να κάνουμε μεταξύ δύο ποσοτήτων δίχως να εκφυλίζεται η αρχική σχέση.»

Αυτό είναι ένα γενικό πρόβλημα, άρα είναι καλό να το κοιτάξουμε. Ας πούμε γράφω: $(P \Rightarrow Q) = (\neg Q \Rightarrow \neg P)$ που έχει σχέση με τη Λογική. Δηλαδή, μία πρόταση Q και συνεπάγεται από την P, αυτό σημαίνει ότι από τη μη-Q συνεπάγεται η μη-P. Αυτά τα δύο είναι τα ίδια. Ξέρετε να το αποδείξετε; Με πίνακα αλήθειας. Ας πούμε ότι δεν το ξέρουμε. Άρα θα το κάνουμε. Αυτές είναι σχέσεις. Η ιδέα του Galois είναι ότι το ένα μπορώ να το βάλω στη θέση του άλλου, αλλά δεν μπορώ να αλλάξω τη σειρά των γραμμάτων μέσα στην ίδια παρένθεση. Αν είχαμε ισοδυναμία, θα είχα το δικαίωμα να το κάνω.

Αυτό μπορείτε να το δείτε και σαν τέτοιο: ○—○. Εδώ έχει έναν ισομορφισμό και μάλιστα μπορείτε να πείτε στην ομάδα αυτομορφισμού. Ενώ είναι πρόταση Λογικής, εδώ θεωρούμε ότι δεν είναι αυτό το πράγμα. Τώρα αν το βάζω ακόμα πιο απλό, •—• αυτό είναι μία ομάδα $\mathbb{Z}$ της τάξης 2. Ας πούμε ότι αυτό είναι ένα Σ, μπορώ να κάνω ό,τι το γράφημα.

Άρα στον πίνακα αλήθειας: $Aut(\Sigma) = \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$. Μετράω πόσες φορές είναι συμμετρικός ο τύπος.

Βέβαια, δεν είναι πολύ αποτελεσματικό αν σκεφτείτε ότι μπορεί να έχετε *n* προτάσεις και *2n* σειρές, γι' αυτό και υπάρχουν άλλες μέθοδοι όπως τα segments, τα διαγράμματα Quine που κάνουν ό,τι κάνουν οι πίνακες αλήθειας αλλά πιο αποτελεσματικά και πιο σύντομα. Αυτό είναι το μάθημα που κάνω στη Λογική, όμως λίγο διαφορετικό. Εδώ η ιδέα είναι ότι δεν θέλω να το αποδείξω. Τι κάνω; Έχω έναν τύπο, δεν ξέρω ποιος είναι και μου λένε ότι είναι ίδιος με έναν άλλο. Κάνω μία προβολή για τον ένα και μία για τον άλλο. Κάνω έναν πίνακα. Αν οι πίνακες είναι ακριβώς οι ίδιοι, τότε είναι οι τύποι όντως ίδιοι. Σχηματικά:



πιστή προβολή (αν δεν είναι, χάνουμε κάποιες λεπτομέρειες)

Αυτό που έχει ενδιαφέρον είναι να δούμε τι γίνεται στην τελευταία στήλη.

P	Q	P ⇒ Q	¬Q ∨ ¬P
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

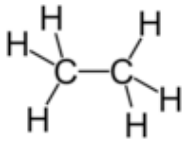
Εδώ τελειώσαμε ήδη. Δεν χρειάζεται να κάνουμε την ισοδυναμία. Ας πούμε τώρα ότι θέλουμε να κάνουμε κάτι που δεν είναι και τόσο προφανές. $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$. Δηλαδή, εδώ σας λέω ότι η συνεπαγωγή από το P στο Q είναι το ίδιο με το μη-P ή Q. Εδώ ο Galois θα σας έλεγε ότι το πρώτο μέρος είναι το ίδιο με το δεύτερο. Εδώ μπορείτε να κάνετε ξανά τον πίνακα.

P	Q	P ⇒ Q	$\neg P \vee Q$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

Όλο αυτό είναι για το σχήμα που κάναμε πιο πάνω, αλλά περισσότερο για να δούμε τα συμμετρικά. Ας πούμε, εδώ ο de Morgan λέει: $\neg(P \wedge Q) = \neg P \vee \neg Q$ και

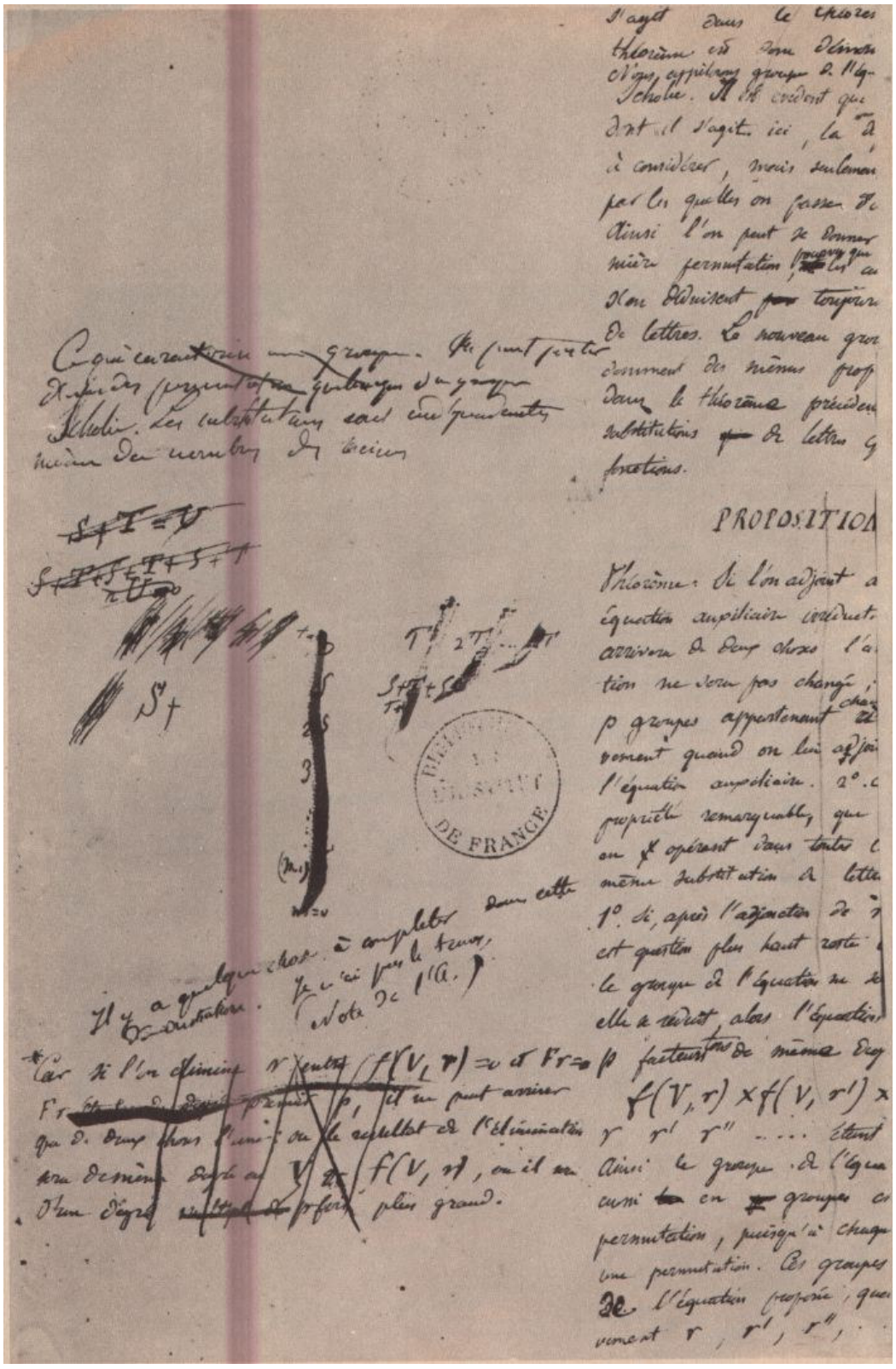
$\neg(P \vee Q) = \neg P \wedge \neg Q$. Εδώ βλέπετε μια συμμετρία αλλά προσέξτε! Στην πρώτη περίπτωση $[(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)]$ παίζει μεταξύ των τύπων. Όχι μέσα στους τύπους. Όμως στον de Morgan αν αλλάξω τη θέση των P και Q δεν αλλάζει τίποτε, διότι αυτή η σχέση είναι συμμετρική. Έχω μία σχέση συμμετρίας εσωτερικής σε κάθε παρένθεση και μία εξωτερική ανάμεσα στις παρενθέσεις.

Ένα άλλο παράδειγμα είναι τα αλκάνια της χημείας. Αν δείτε το βιβλίο Θεωρίας Ομάδων που έχουμε στο τέλος, θα δείτε ότι έχει και κρυσταλλογραφία. Ας πάρουμε το αιθάνιο.



Εδώ παρατηρούμε ότι έχουμε μία συμμετρία τριπλή, όπου μπορείτε να «πετάξετε» τα υδρογόνα (H) όπου θέλετε. Αυτό δεν είναι κυκλικό, είναι S_3 και συνδέεται με ένα άλλο S_3 και επιπλέον εδώ έχκό

Μελέτη των χειρογράφων του Galois.

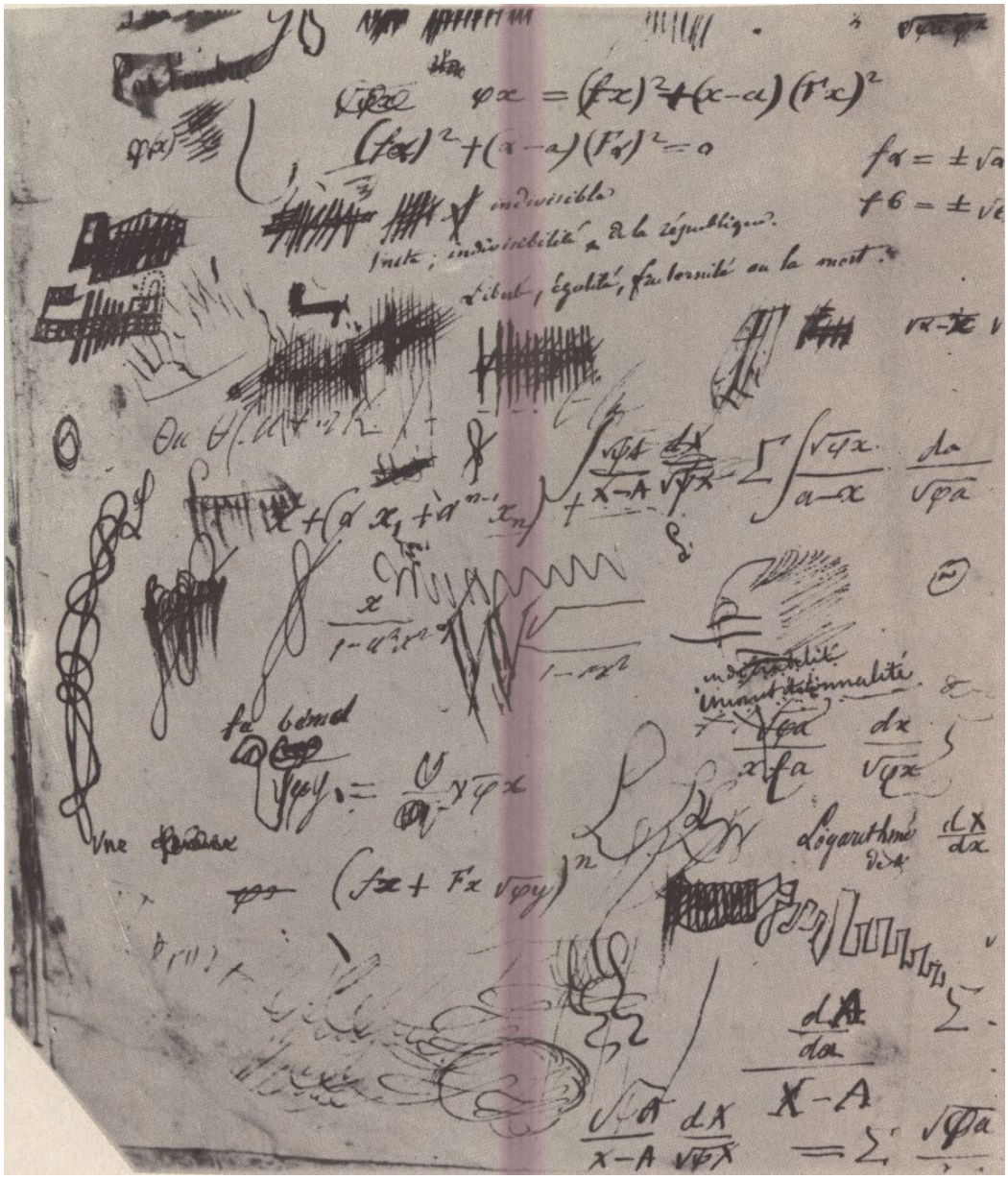


Σε γενικό πλαίσιο, να είστε πολύ προσεκτικοί. Όταν μιλάτε για μαθηματικά και σπάνιους ανθρώπους, οι γενικές εκφράσεις σας καταρρέουν. Εσείς ξέρετε πολλούς ανθρώπους στον κόσμο που όταν είναι 21 χρονών πεθαίνουν έχοντας αφήσει ένα έργο που δημιουργεί μία θεωρία; Αυτός είναι ο Galois. Εγώ δεν ξέρω άλλο παράδειγμα. Πολύ συχνά αναφερόμαστε σε νοητικά σχήματα που ισχύουν γενικά στην κοινωνία και τα εφαρμόζουμε αδιάκριτα. Είναι το αιώνιο πρόβλημα. Έχεις έναν τεράστιο κάμπο από μαργαρίτες και τυχαίνει μέσα να υπάρχει και μία παπαρούνα. Και λες ότι εκτός από ένα λουλούδι, όλα τα άλλα είναι μαργαρίτες. Σωστό. Όμως μετά σε ενοχλεί που δεν έχει το ίδιο χρώμα. Και λες, αν αγνοήσουμε το χρώμα, έχει και αυτό πέταλα. Και συνεχίζεις, έχει και αυτό κοτσάνι. Και συνεχίζεις... Αλλά είναι εκείνο που δεν μπορείς να αποδεχτείς κοινωνικά: ούτως ή άλλως είναι ένα άλλο φυτό. Τώρα μπείτε στη θέση της παπαρούνας. Η παπαρούνα έχει δικαίωμα να πει ότι όλα τα φυτά που βρίσκονται σε αυτόν τον κάμπο είναι μαργαρίτες. Το νοητικό σχήμα είναι ότι πολύ συχνά οι σπάνιοι άνθρωποι μπορούν να δουν τους κανόνες. Ενώ αυτοί που δεν είναι σπάνιοι δεν μπορούν καν να τους δουν. Λόγω της οντολογίας τους.

Τα χειρόγραφα, όπως βλέπετε, βρίσκονται στη βιβλιοθήκη της Ακαδημίας της Γαλλίας. Όπως βλέπετε υπάρχουν και νούμερα (11, 72) που είναι από την αρχειοποίηση. Τώρα πια τα προσέχουμε και δεν βάζουμε σφραγίδες και νούμερα όπου να ’ναι. Σε χειρόγραφα του Καραθεοδωρή υπάρχει ακόμα και διάτρηση.

Μελέτη των χειρογράφων του Galois.

Αν θέλουμε να κοιτάξουμε το άλλο χειρόγραφο.



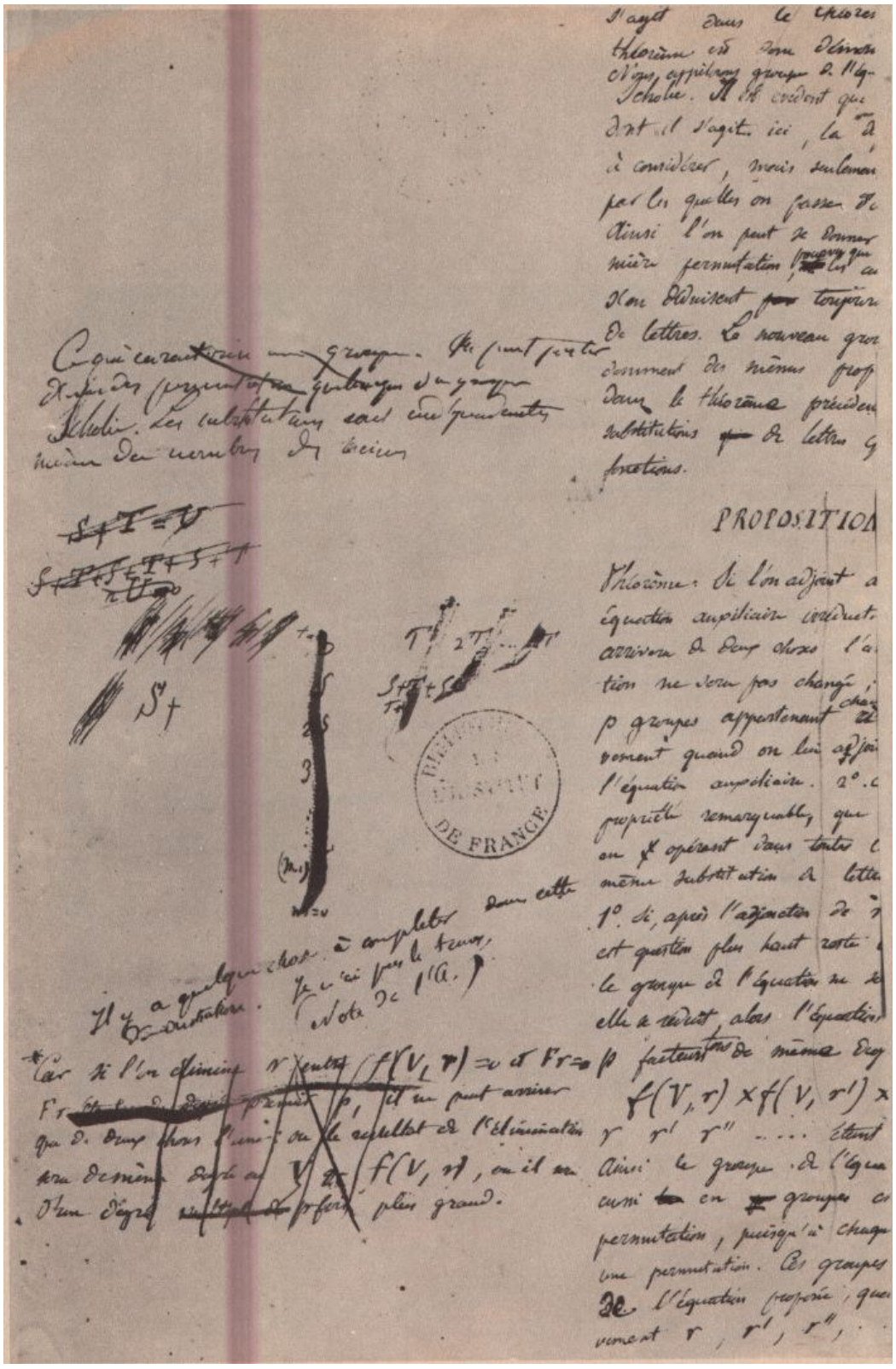
Υπάρχει ένας λογάριθμος χαμηλά στα δεξιά. Άρα γιατί κάνει το Λογάριθμο; Αυτό είναι ένα ερώτημα. Θέλω να καταλάβετε ότι αυτά δεν αφορούν μόνο και μόνο στα μαθηματικά. Δηλαδή, εδώ έχετε ένα μαθηματικό τύπο, αμέσως μετά τη φράση «*l'unité, indivisibilité de la république*» και μετά έχετε «*Liberté, égalité, fraternité ou la mort*». Δηλαδή, Ελευθερία, ισότητα,

αδελφότητα ή θάνατος. Αυτό είναι ένα σχήμα που είναι πολύ παλιό στη Γαλλία, ακόμα και πριν την επανάσταση. Τα χαρτιά του Galois πρέπει να τα βλέπετε ως ένα μείγμα. Εδώ έχουμε ένα μαθηματικό σκέλος, ένα πολιτικό σκέλος, έχουμε μουσικό με το fa bemol, μετά έχουμε κάτι σαν ζωγραφιές που δεν ξέρω τι κάνει, έχουμε κάτι σαν υπογραφές, έχουμε το λογάριθμο που δεν ξέρουμε τι κάνει εκεί, άρα είναι λίγο δύσκολο να δούμε πού το πάει. Είναι πραγματικά ένα χειρόγραφο και ένα πρόχειρο. Χαμηλά στα αριστερά γράφει *une femme*, δηλαδή «μία γυναίκα». Το βλέπετε αυτό; Άρα εδώ είναι κάτι που αφορά στο γυναικείο που, όπως ξέρουμε πια, ήταν ο λόγος της μονομαχίας.

Μελέτη των χειρογράφων του Galois.

Θα μπορούσαμε να διαβάσουμε και αυτό το χειρόγραφο.

Μελέτη των χειρογράφων του Galois.



Εδώ γράφει *Proposition*. Θα μπορούσε να είναι στον πληθυντικό, αλλά δεν μας βοηθά γιατί είναι κομμένο. Βλέπω και τη λέξη *Théorèmes*. Εδώ πρέπει να δούμε πόσο μεγάλο είναι το κόψιμο. Τώρα, λοιπόν, μπορούμε να καταλάβουμε κάποια πράγματα. Βλέπουμε ότι υπάρχει η λέξη *groupes*.

Τώρα θέλω να δούμε πιο αναλυτικά πώς είναι μια μικρή, απλή ομάδα και μετά θα δούμε αν μπορούμε να βγάλουμε μερικά πράγματα από αυτήν.

Θυμάστε από τι χαρακτηρίζεται μία ομάδα;

1) Προσεταιριστικότητα a(bc) = (ab)c
2) Ουδέτερο στοιχείο $\forall x \in G \; \exists \frac{e}{xe} = ex = x$
3) Συμμετρικό στοιχείο $\forall x \in G \; \exists \, x^{-1} / \; x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$

Και ως (0) θα βάζαμε ότι είναι εσωτερική πράξη.

Εμείς θέλουμε να δούμε ποια είναι η πιο απλή μορφή ομάδας. Απλή αλλά όχι τετριμμένη, γιατί αλλιώς θα παίρναμε ομάδα με μόνο ένα στοιχείο, δηλαδή το ουδέτερο. Για να πάμε στο πιο απλό, πρέπει να πάρουμε μία ομάδα με δύο στοιχεία: το e και το a. Εφόσον το e είναι το ουδέτερο, ξέρουμε ήδη ότι το ea=ae=a, άρα ξέρουμε ήδη δύο πράξεις. Πόσες πράξεις μας μένουν; ee=e. Άρα μας μένει μόνο το aa=;

Κάνουμε έναν πίνακα του Cayley. Στον πίνακα του Cayley γράφουμε όλα τα στοιχεία. Εδώ είναι το e και το a. Επειδή είναι η πρώτη φορά, θα γράψω και τις πράξεις μέσα:

Πίνακας Cayley

	e	a
e	ee=e	ea=a
a	ae=a	

Στην πραγματικότητα

	e	a
e	e	a
a	a	;

Το aa δυνητικά έχει δύο λύσεις: το e και το a. Τώρα θέλουμε να δούμε αν υπάρχει κάποιο πρόβλημα εδώ. Θέλω να το σκεφτούμε χωρίς την ιδιότητα που θα χρησιμοποιήσουμε μετά. Βλέπουμε ότι μέχρι τώρα για να συμπληρώσουμε τον πίνακα χρησιμοποιήσαμε μόνο το 2 από τις παραπάνω προτάσεις. Όσον αφορά στην προσεταιριστικότητα, έχουμε μόνο δύο στοιχεία. Μόλις παίρνω δύο στοιχεία και σίγουρα το ένα είναι το ουδέτερο, τότε μας δίνει το άλλο. Άρα χρησιμοποιούμε και την προσεταιριστικότητα. Από τις τρεις πιο πάνω προτάσεις, μας έμεινε να χρησιμοποιήσουμε μόνο την 3. Άρα, το aa^{-1} ξέρουμε ότι υπάρχει. $aa^{-1} = a^{-1}a = e$. Το ερώτημά μας είναι απλό: ποιος είναι ο a^{-1}; Και η απάντηση είναι πάρα πολύ απλή: είναι $a^{-1} = a$. Εφόσον $a^{-1} \neq e \Rightarrow a^{-1} = a$. Από αυτό συνεπάγεται ότι $a^{-1}a = a^2 = e$.

Άρα αποδείξαμε ότι αυτός εδώ ο πίνακας συμπληρώνεται μόνο με έναν τρόπο, τον εξής:

	e	a
e	e	a
a	a	e

Αυτή είναι ομάδα τάξης 2 και είναι μοναδική.

Ουσιαστικά, ψάχνουμε να δούμε πόσες ομάδες υπάρχουν που να έχουν μόνο δύο στοιχεία. Παίρνουμε τον πίνακα του Cayley και προκύπτουν κάποιες πράξεις. Από τα χαρακτηριστικά του πίνακα, κάποιες πράξεις γίνονται αυτόματα. Το μόνο που μένει είναι το aa=; Βρίσκουμε τα χαρακτηριστικά που έχουμε χρησιμοποιήσει και βλέπουμε ότι μόνο το 3 μάς πιέζει. Εφόσον μας πιέζει, είναι αυτό που θα μας βοηθήσει. Το χρησιμοποιούμε και όντως μας βοηθά.

Προσέξτε, διότι δεν τελειώσαμε εδώ. Διότι θα μπορούσε να μην υπάρχει καθόλου. Εμείς εδώ, δεν έχουμε αποδείξει ένα μεγάλο θεώρημα που λέει ότι για κάθε τάξη υπάρχει τουλάχιστον μία ομάδα. Δεν είναι αυτονόητο αυτό.

Άρα εδώ αποδείξαμε για πρώτη φορά, χωρίς να ξέρουμε πολλά πράγματα ότι υπάρχει μία μόνο ομάδα τάξης 2. Επιπλέον, μπορούμε να δούμε ότι αυτή η ομάδα είναι συμμετρική, άρα είναι αβελιανή και αντιμεταθετική. Άρα, η μόνη ομάδα που μπορούμε να κάνουμε χωρίς να είναι εκφυλισμένη είναι αντιμεταθετική.

Τώρα θα προσπαθήσουμε να κάνουμε ακριβώς το ίδιο με ομάδα τάξης 3, χρησιμοποιώντας όμως αυτή τη φορά, μία **βασική ιδιότητα** που είδαμε εδώ αλλά δεν τη χρησιμοποιήσαμε, και είναι η εξής:

Σε κάθε γραμμή και σε κάθε στήλη του πίνακα του Cayley βρίσκουμε μία και μόνο φορά όλα τα στοιχεία της ομάδας.

Δεν θα είχε νόημα να το λέγαμε για την ομάδα τάξης 2, γιατί είναι σχεδόν αυτονόητο. Όμως στις υπερομάδες του Frédéric Marty τις οποίες εισήγαγε το 1934, αυτό δεν ισχύει.

Ας περάσουμε σε αυτό που λέγαμε. Με αυτή την ιδιότητα πρέπει να βλέπω σε κάθε γραμμή και τα δύο και σε κάθε στήλη και τα δύο. Άρα με βάση αυτή την ιδιότητα βρίσκω ότι το τελευταίο πρέπει να είναι e, δεν έχω άλλη επιλογή. Για να δούμε τώρα πώς προκύπτει αυτή η ιδιότητα. Αν δεν βρίσκουμε μία φορά κάθε στοιχείο της ομάδας, τότε μπορούμε να γράψουμε ότι:

Αν δεν είναι όλα $\Rightarrow \exists$ 2 φορές το ίδιο a

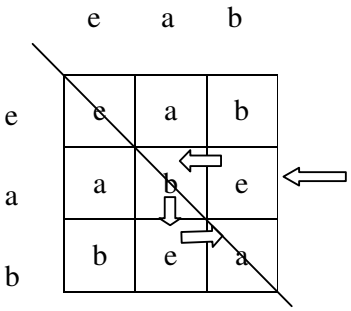
$$\left.\begin{array}{ll} x\cdot y_1=a & x^{-1}xy_1= x^{-1}a \\ x\cdot y_2=a & x^{-1}xy_2= x^{-1}a \end{array}\right\} \quad \exists \quad y_1=y_2$$

Άρα για να το αποδείξουμε, λέμε ότι εφόσον δεν είναι όλα διαφορετικά, υπάρχει δύο φορές κάτι. Το ονομάζουμε a και βλέπουμε ότι εάν είναι στην ίδια γραμμή – το ίδιο θα συνέβαινε αν παίρναμε στήλη – τότε, επειδή είναι ομάδα, ξέρουμε ότι υπάρχει ο αντίστροφος, άρα τον βάζουμε και από τις δύο πλευρές και ένα στοιχείο σβήνει. Άρα μένει ότι το y_1 ίσον αυτό, y_2 ίσον

αυτό. Και όπως ξέρουμε ότι αυτό είναι εσωτερική πράξη και είναι μονοσήμαντη, αναγκαστικά είναι το ίδιο. Βρήκαμε, λοιπόν, ένα πολύ ωραίο πρόβλημα ότι δηλαδή σε κάθε γραμμή και σε κάθε στήλη, υπάρχει μόνο μία φορά, κάθε στοιχείο της ομάδας και για να το αποδείξουμε αυτό κάναμε χρήση της ιδιότητας της εσωτερικής πράξης.

Τώρα θα χρησιμοποιήσουμε αυτή την ιδιότητα για να βρούμε πόσες ομάδες τάξης 3 υπάρχουν. Αυτό είναι μία ωραία προσέγγιση που μας επιτρέπει να τις ανακαλύψουμε, χωρίς να ξέρουμε ακριβώς τι είναι, με κάποια εργαλεία σχετικά απλά.

G τάξης 3

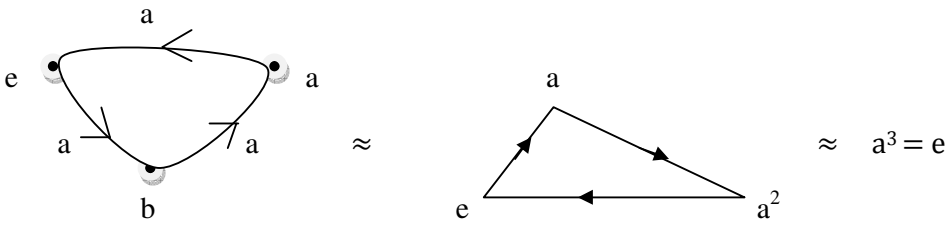


επειδή τα a, b υπάρχουν σε στήλη/γραμμή

Abel (παρατηρούμε ότι ο πίνακας είναι συμμετρικός άρα έχουμε αβελιανή ομάδα)

Βλέπουμε τελικά ότι αυτή η ομάδα είναι η $G \approx Z/3Z$

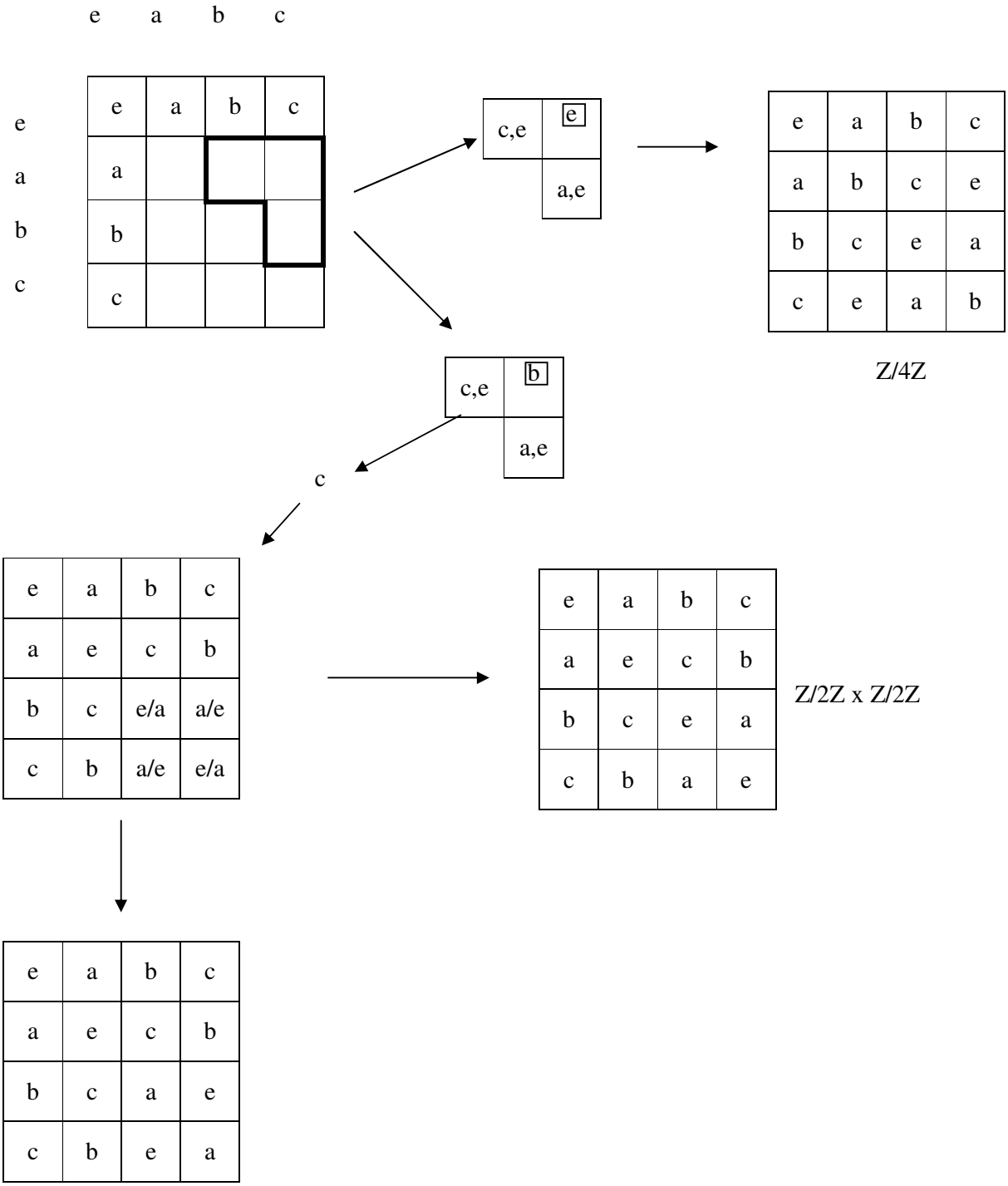
Το παραπάνω είναι ο πίνακας του Cayley. Τώρα θα κάνουμε το γράφημα του Cayley, όπου πάνω στις ακμές γράφω με τι πολλαπλασιάζω. Υπάρχουν διάφορες μορφές:



το κάθε ένα από τα παραπάνω είναι και μία παρουσίαση.

Τώρα, για να δούμε τι γίνεται με την ομάδα τάξης 4.

G τάξης 4



Στην αρχή ξεκινάμε από την πρώτη γραμμή και την πρώτη στήλη που είναι εύκολο επειδή έχουμε το ουδέτερο στοιχείο. Στη συνέχεια βλέπουμε ότι εφόσον δεν μπορούμε να έχουμε δύο φορές το ίδιο στοιχείο σε κάθε γραμμή ή στήλη, υπάρχουν κάποια στοιχεία που δεν μπορούμε να τα βάλουμε όπου θέλουμε, ας πούμε στη πράξη a με το a, εφόσον έχουμε ήδη το στοιχείο a στην ίδια στήλη και γραμμή, δεν μπορούμε να το βάλουμε. Γενικά, δεν μας συμφέρει να βλέπουμε τη

διαγώνιο επειδή είναι πολλοί οι υποψήφιοι. Στην ουσία, μας συμφέρει να κοιτάζουμε εκεί που είναι σταυρωτά. Δηλαδή στην πράξη του c με το a, δεν μπορεί να είναι ούτε c, ούτε a. Οπότε ξέρουμε ότι πρέπει να είναι ή e ή b. Με τον ίδιο τρόπο, μπορούμε να βρούμε ποιοι είναι οι υποψήφιοι για τα στοιχεία δεξιά και κάτω από αυτό, οπότε έχουμε το πρώτο σχήμα. Εφόσον από αυτά τα τρία, έχουμε ένα που είναι σταυρωτό, μας συμφέρει να δούμε αυτό και να κοιτάξουμε τι επιλογές έχουμε. Έτσι παίρνουμε τα υπόλοιπα σχήματα (με μικρό τετράγωνο συμβολίζουμε εδώ την επιλογή που κάνουμε). Στην περίπτωση που βάλουμε το e, βλέπουμε ότι τα «σκοτώνουμε όλα», οπότε παίρνουμε αμέσως έναν πίνακα που θα δούμε ότι είναι ο Z/4Z. Τώρα αν κάνουμε την επιλογή του b, βλέπουμε ότι θα πρέπει να ξανακάνουμε επιλογή για το αριστερό «κουτάκι», οπότε παίρνω μετά τις δύο εκδοχές. Πιο πάνω βλέπουμε την επιλογή του c. Το ίδιο μπορούμε να κάνουμε με το e.

Ωστόσο θα πρέπει να δούμε ποιο από τα παραπάνω είναι προσεταιριστικό. Δηλαδή θα πρέπει να ισχύει:

$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$ για κάθε a,b,c

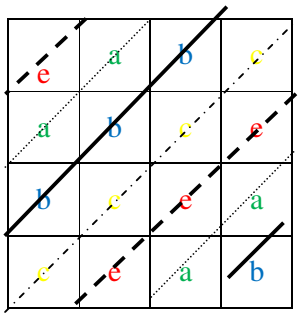
Μπορούμε για παράδειγμα να δούμε στον τελευταίο πίνακα που γράψαμε εάν το $a\cdot(b\cdot c)$ ισούται με το $(a\cdot b)\cdot c$, οπότε βρίσκουμε ότι στην πρώτη περίπτωση έχουμε $b\cdot c=e$ και $a\cdot e=a$, $a\cdot b=c$ και $c\cdot c=a$, οπότε βλέπουμε ότι και στις δύο περιπτώσεις παίρνουμε a.

Αυτή τη διαδικασία την κάναμε για να βρούμε τις υπερομάδες σε συνεργασία με τον Bayon. Συγκεκριμένα, βρήκαμε ότι υπάρχουν 3999 τάξης 3, ενώ ο Βουγιουκλής είχε βρει 8 υπερομάδες τάξης 2. Να προσέξετε ότι μιλάμε για υπερομάδες, όχι H_v, γιατί στις H_v είναι πολύ περισσότερες. Για να καταλάβετε, στην τάξη 3 είναι στο εκατομμύριο, η H_v είναι γενίκευση της υπερομάδας. Το 2008 κάναμε τους υπερδακτύλιους τάξης 3.

Μετά από αυτή τη μέθοδο, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα ότι όλα τα στοιχεία στην 4^{η} θα πρέπει να μας δίνουν e. Οπότε για παράδειγμα βλέπουμε ότι στον τελευταίο πίνακα το $b^4=((b\cdot b)\cdot b)\cdot b=(a\cdot b)\cdot b=c\cdot b=e$. Και βλέπουμε ότι για το b, αυτό το κριτήριο ισχύει. Στη συνέχεια, μπορούμε να ελέγξουμε και τα υπόλοιπα στοιχεία ως προς αυτό.

Μία άλλη ιδιότητα που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε είναι το συμμετρικό στοιχείο. Για παράδειγμα το συμμετρικό του b είναι το c. Το συμμετρικό του c είναι το b. Βλέπουμε ότι για αυτά τα δύο στοιχεία ισχύει, αλλά θα μπορούσε για κάποια να μην ισχύει και άρα να μην είναι ομάδα.

Ο πιο σίγουρος πίνακας είναι ο πρώτος, ο Z/4Z, επειδή είναι κυκλικός. Δηλαδή βλέπουμε ότι το κάθε στοιχείο εμφανίζεται σε συγκεκριμένη θέση:



(κυκλική ομάδα)

Αυτό που ξέρουμε είναι ότι για οποιαδήποτε τάξη, υπάρχει η κυκλική ομάδα. Οπότε για τις ομάδες τάξης πρώτου αριθμού, ξέρουμε ότι είναι μία και ότι είναι αυτή.

Με όλα αυτά τα κριτήρια, που προς το παρόν είναι μόνο οι ιδιότητες, μπορούμε να σβήσουμε αρκετές υποψήφιες ομάδες. Στη συνέχεια έρχονται τα θεωρήματα που σβήνουν και άλλες. Αυτό που θέλω να καταλάβετε προς το παρόν είναι αυτό.

Αυτό που έχει ενδιαφέρον είναι να δούμε πόσες ομάδες βγαίνουν και για τάξη 5, επειδή θα δείξουμε ότι είναι μία και μοναδική ομάδα, το οποίο συμβαίνει για όλες τις ομάδες τάξης πρώτου αριθμού. Βέβαια το επόμενο που μπορούμε να κάνουμε είναι να δούμε τι συμβαίνει με τις ομάδες τάξης 8, γιατί είναι αρκετά πλούσιο. Εκεί έχουμε τις:

$Z/8Z$, $Z/2ZxZ/4Z$, $(Z/2Z)^3$, τη διεδρική ομάδα D_4 και τη Q_4 (Quaternions)

(το δεύτερο Z μπαίνει επειδή έχουμε την ομάδα Z στην οποία δρα για παράδειγμα η 2Z, την κάνουμε modulo).

Για να δούμε τώρα τι γίνεται με την ομάδα τάξης 5:

e	a	b	c	d
a	d_3	c_1	e_0	b_2
b	c_5	a_{13}	d_9	e_{10}
c	e_4	d_{14}	b_{11}	a_7
d	b_6	e_{15}	a_8	c_{12}

Εάν προσπαθήσουμε να πάρουμε όλες τις πιθανότητες, βλέπουμε ότι είναι πολλές. Ας πούμε για το στοιχείο a·c μπορεί να είναι ή το e ή το b ή το d. Θα πρέπει αν θέλουμε να το κάνουμε υπολογιστικά να τα πάρουμε όλα και να δούμε μετά πόσοι υποψήφιοι εμφανίζονται. Αυτό που θέλω να καταλάβετε είναι ότι τα θεωρήματα βοηθούν πολύ στο να σβήνετε εξ αρχής πολλούς υποψήφιους. Ας δούμε μία φορά μόνο πώς μπορεί να λειτουργήσει αν πάρουμε για παράδειγμα το e (με δείκτες ονομάζω τα βήματα που επεξηγούνται παρακάτω):

1) Δεν μπορεί να είναι ούτε a, ούτε b, ούτε e. Οπότε λέμε ότι έστω ότι είναι c
2) Δεν μπορεί να είναι ούτε a, ούτε c, ούτε e ούτε d. Άρα αναγκαστικά είναι b
3) Δεν μπορεί να είναι ούτε a, ούτε c, ούτε e ούτε b. Άρα αναγκαστικά είναι d
4) Το $a \cdot c = e$ οπότε το $a^{-1} = c$, οπότε το $c \cdot a = e$
5) Δεν μπορεί να είναι ούτε a, ούτε d, ούτε e ούτε b. Άρα αναγκαστικά είναι c
6) Δεν μπορεί να είναι ούτε a, ούτε d, ούτε e ούτε c. Άρα αναγκαστικά είναι b
7) Δεν μπορεί να είναι ούτε b, ούτε d, ούτε e ούτε c. Άρα αναγκαστικά είναι a
8) Δεν μπορεί να είναι ούτε b, ούτε d, ούτε e ούτε c. Άρα αναγκαστικά είναι a
9) Δεν μπορεί να είναι ούτε b, ούτε a, ούτε e ούτε c. Άρα αναγκαστικά είναι d
10) Δεν μπορεί να είναι ούτε b, ούτε a, ούτε d ούτε c. Άρα αναγκαστικά είναι e
11) Δεν μπορεί να είναι ούτε e, ούτε a, ούτε d ούτε c. Άρα αναγκαστικά είναι b
12) Δεν μπορεί να είναι ούτε b, ούτε a, ούτε d ούτε e. Άρα αναγκαστικά είναι c
13) Δεν μπορεί να είναι ούτε b, ούτε e, ούτε d ούτε c. Άρα αναγκαστικά είναι a
14) Δεν μπορεί να είναι ούτε b, ούτε a, ούτε e ούτε c. Άρα αναγκαστικά είναι d
15) Δεν μπορεί να είναι ούτε b, ούτε a, ούτε d ούτε c. Άρα αναγκαστικά είναι e

Βλέπετε ότι ακόμα και αν δεν είναι το σωστό, εμείς καταφέραμε να γεμίσουμε τον πινάκα και τώρα θα πρέπει να αρχίσουμε να σβήνουμε χρησιμοποιώντας τα θεωρήματα. Αυτό που θέλω να καταλάβετε είναι ότι δεν γίνεται αλλιώς. Εκτός αν έχετε από πριν ένα θεώρημα. Ουσιαστικά τόση ώρα παιδευόμαστε για να νιώσουμε την ανάγκη του θεωρήματος που θα μάθουμε μετά. Γιατί βλέπετε ότι έχουμε τόσες πολλές επιλογές που ακόμα και με τρεις δικές μας επιλογές, καταλήγουμε σε κάτι που πάλι συμπληρώνει τον πίνακα με βάση αυτή μόνο την ιδιότητα. Ας πούμε εδώ νιώθουμε πώς θα βοηθούσε ένα θεώρημα που θα έλεγε ότι πρέπει να είναι συμμετρικό. Δηλαδή ότι:

∀G#N/ N<8:G αβελιανή

http://www.lygeros.org/Math/records.html

- **The number of abelian hypergroups of order N.**

N=02: 6 (R. Bayon, N. Lygeros 10/2004)
N=03: 466 (R. Bayon, N. Lygeros 10/2004)
N=04: 10.614.362 (R. Bayon, N. Lygeros 03/2005)

HELPERS : Philippe Alsina, Patrice Deloche, Yoann Martinez.

- **The number of abelian Hv-groups of order N.**

N=02: 10 (R. Bayon, N. Lygeros 10/2004)
N=03: 7.926 (R. Bayon, N. Lygeros 10/2004)
N=04 : 8.028.299.905 (R. Bayon, N. Lygeros 04/2005)

HELPERS : Philippe Alsina, Patrice Deloche, Yoann Martinez.

- **The number of hyperrings of order N.**

N=02: 63 (R. Bayon, N. Lygeros 2007)
N=03: 33 277 642 (R. Bayon, N. Lygeros 2007)

- **The number of Hv-rings of order N.**

N=02: 875 (R. Bayon, N. Lygeros 2007)

Μελέτη των χειρογράφων του Galois.