Δικτυωτά διαγράμματα και ομάδες

N. Lygeros

(Με πλάγια γράμματα είναι η παρουσίαση της εργασίας μίας φοιτήτριας)

Δικτυωτά Διαγράμματα Ομάδας

Τι είναι τα δικτυωτά διαγράμματα; Τη λέξη ομάδα τη δεχόμαστε γιατί την ξέρουμε. Τα δικτυωτά; Το διάγραμμα;

Είναι κυκλική ομάδα.

Μάλλον υπονοείς ότι τα παραδείγματα που έχεις είναι κυκλική ομάδα.

Τα παραδείγματά μου είναι σίγουρα, δεν ξέρω όμως αν ισχύει και γενικότερα.

Ισχύει και γενικότερα. Άρα, κάτω από τον τίτλο θα γράψεις: Παράδειγμα με κυκλική ομάδα. Επιλέγεις τη $\mathbb{Z}_4$.

$\bar{1}$*: υποομάδα της* $\mathbb{Z}_4$

Το είπαμε στο χθεσινό μάθημα, δεν είναι υποομάδα της $\mathbb{Z}_4$. Είναι γεννήτορας. Άρα, θα λέμε ότι έχουμε απόλυτη **υποομάδα** όταν θα είναι πιο μικρή η υποομάδα από την ομάδα και θα λέμε **ομάδα**, όταν θα μπορεί να είναι και η ίδια η ομάδα. Αυτό όντως θα παράγει όλη την ομάδα. Άρα θα ήταν καλό να ορίσουμε το 1, το $\bar{1}$ και μετά το <1>. Είναι τρία διαφορετικά πράγματα.

1: στοιχείο της $\mathbb{Z}_4$

$\bar{1}$ *: κλάση του 1*

<1>: ομάδα που παράγεται από την κλάση του 1.

Τι είναι οι κλάσεις; Θέλει να πει ότι είναι του ίδιου τύπου. Δηλαδή, αν κοιτάζω τους αριθμούς modulo 2 η κλάση του 0 είναι όλοι οι ζυγοί. Η κλάση του 1 είναι όλοι οι μονοί. Οποιονδήποτε και να πάρετε είναι μέσα σ' αυτές τις δύο κλάσεις. Εμείς είχαμε πει εχθές ότι όταν έχουμε μία κλάση μπορούμε να την ερμηνεύσουμε ως την τροχιά (orbite) του στοιχείου μέσα στην ομάδα. Άρα, συμπληρώνεις:

1: στοιχείο της $\mathbb{Z}_4$

$\bar{1}$ *: κλάση του 1 [τροχιά (orbite) του στοιχείου 1 μέσα στην ομάδα]*

<$\bar{1}$>*: ομάδα που παράγεται από την κλάση του 1.*

Το καταλαβαίνετε αυτό; Αν θέλετε αλλιώς, το σύνολο της τροχιάς αποτελεί την κλάση. Όταν θα το κάνει χειροπιαστά, θα πάρει την τροχιά και θα πάρει το 1 και θα κάνει +1. Αν έπαιρνε του 2 θα έκανε +2. Θα βρει κάποιους αριθμούς. Η διαφορά με την κλάση είναι ότι στην τροχιά πρέπει να είναι διαδοχικά τα νούμερα. Δηλαδή, θα μου πεις ότι η τροχιά είναι 2, 4, 6. Δεν είναι η 2, 6, 4. Η κλάση όμως δεν έχει τέτοια σειρά. Είναι μόνο οι αριθμοί από τους οποίους θα περάσει. Μπορούμε να τις βάλουμε μετά σε μία σειρά αυθαίρετα. Όταν για παράδειγμα, λέμε ότι modulo 2 η κλάση του 0 είναι οι ζυγοί, δεν υπονοούμε ότι κάνουμε +2, +2, απλώς ανήκουν στην ίδια κλάση. Ενώ αν ζητάω την τροχιά κάνουμε +2, +2, κ.ο.κ. Μια παρατήρηση παιδαγωγικής, για οποιοδήποτε μάθημα δεν μπορείτε να πείτε αμέσως αυτό είναι αυτό. Πρέπει να ορίσετε. Αυτό που μας έγραψες στην αρχή, πρέπει να μας πεις ότι είναι ο στόχος μας. Δεν είναι αυτό που θα ακολουθήσει αμέσως μετά. Άρα μας κάνεις το παράδειγμα και μετά από αυτό θα καταλάβουμε ποια είναι αυτή η έννοια. Οπότε, με το 1 θα προσθέσεις. Όπως καταλαβαίνετε η έννοια της πρόσθεσης είναι συμβατική, δηλαδή μπορούν να είναι και οι άλλες πράξεις.

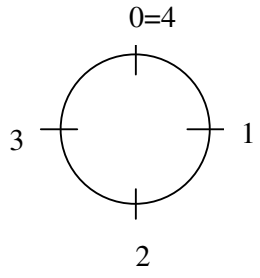
Η ομάδα που παράγεται από την κλάση του 1 αποτελείται από το 1 και κάθε φορά προσθέτουμε το 1 μέχρι να καταλήξουμε στην ομάδα που παράγεται από την κλάση του 0.

$<\bar{1}>=\{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{0}\}$

$<\bar{2}>=\{\bar{2}, \bar{0}\}$

$<\bar{3}>=\{\bar{3}, \bar{2}, \bar{1}, \bar{0}\}$

$<\bar{0}>=\{\bar{0}\}$



Κανονικά, επάνω έπρεπε να γράψεις αντί για 1, α. Τη γενική μορφή. Άρα, θα γίνει:

α: στοιχείο της $\mathbb{Z}_n$

$\bar{a}$ *: κλάση του 1 [τροχιά (orbite) του στοιχείου α μέσα στην ομάδα]*

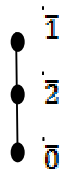
$<\bar{a}>$*: ομάδα που παράγεται από την κλάση του α.*

Γιατί σταματάς όταν φτάνεις στο 0; Επειδή είναι κυκλικό ξαναβρίσκεις ακριβώς τους ίδιους αριθμούς. Θέλω απλώς να καταλάβετε ότι όταν σας το εξηγεί ένας φοιτητής, αποκλείεται να μην το καταλάβετε. Πήρε ένα παράδειγμα απλό, το κάνει εντελώς αναλυτικά και τώρα τι θα μας πεις;

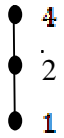
Πριν κάνουμε το δικτυωτό διάγραμμα εντοπίζουμε ότι κάποια από αυτά είναι ίδια. Άρα, $<\bar{1}>=<\bar{3}>$*. Μπορεί να μην είναι με την ίδια σειρά, αλλά αφού είναι κυκλική ομάδα, δεν παίζει ρόλο.*

Αυτό το κάνουμε γιατί ο διαφορετικός αριθμός θα καθορίσει πόσα στοιχεία θα έχει το διάγραμμα.

Το δικτυωτό διάγραμμα, λοιπόν, είναι αυτό:



Στην πραγματικότητα, το $\bar{1}$ είναι το $\mathbb{Z}_4$, το $\bar{2}$ είναι το $\mathbb{Z}_2$. Αρχίζουμε να βλέπουμε αυτά που κάναμε την προηγούμενη φορά. Δηλαδή, το 2 διαιρεί το 4. Αν το είχα γράψει σαν διαίρεση, θα ήταν έτσι:



Εμείς αυτό μάθαμε εχθές. Μπορεί να μην είναι ίδιο όσον αφορά στις ετικέτες αλλά είναι το ίδιο στο τέλος. Γιατί, μπορείτε να δείτε ότι αντιστοιχίζονται τα δύο. Άρα, αυτό είναι ένα πολύ σημαντικό δομικό εργαλείο. Αυτό που θα μπορούσε να μας εξηγήσει τώρα είναι ότι αν έγραφε $\mathbb{Z}_8$ και έκανε ό,τι έχει κάνει θα έβλεπες ότι τελικά θα έχεις μόνο 4. Μας το έκανες πολύ αναλυτικά και καταλάβαμε όλοι τι γίνεται.

Τώρα, θα κάνω το $(\mathbb{Z}_5,+)$.

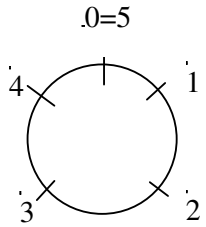
$<\bar{1}>=\{\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{0}\}$

$<\bar{2}>=\{\bar{2},\bar{4},\bar{1},\bar{3},\bar{0}\}$

$<\bar{3}>=\{\bar{3},\bar{1},\bar{4},\bar{2},\bar{0}\}$

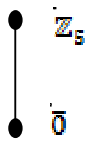
$<\bar{4}>=\{\bar{4},\bar{3},\bar{2},\bar{1},\bar{0}\}$

$<\bar{0}>=\{\bar{0}\}$



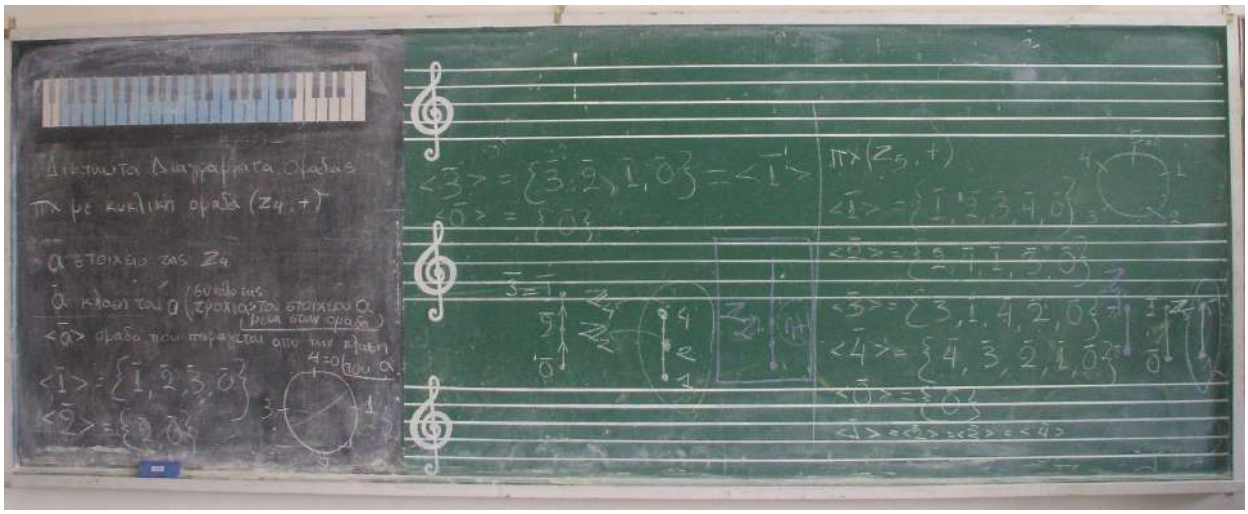
Εδώ προσέχουμε ότι $<\bar{1}>=<\bar{2}>=<\bar{3}>=<\bar{4}>$

Άρα, το δικτυωτό διάγραμμα είναι έτσι:



Αν το κάναμε αλλιώς θα ήταν στη θέση του $\mathbb{Z}_5$ το 5 και στην θέση του $\bar{0}$ το 1. Και όντως, για τους διαιρέτες δεν έχετε κανέναν αριθμό που είναι ενδιάμεσος. Γι' αυτό σας λέω, ότι με αυτόν τον τρόπο μπορούμε σιγά-σιγά να ανακαλύψουμε το θεώρημα του Lagrange και να καταλάβουμε γιατί ο Lagrange το βρήκε προτού υπάρξουν οι ομάδες. Διότι, στην πραγματικότητα είναι ένα πρόβλημα διαιρετότητας στους ακεραίους. Δηλαδή, από όλο αυτό το πράγμα γίνεται μόνο ένα, διότι το 5 είναι πρώτος. Τόσο απλά. Το 4 γιατί γίνεται δύο; Διότι έχει δύο διαιρέτες. Τον εαυτό του και το 2. Άρα, προσέξτε τώρα τι κάνουμε. Κάνουμε όλη τη θεωρία και μετά λέμε το συμπέρασμα. Τώρα, σβήστε αυτό που κάναμε στη θεωρία και ας υποθέσουμε ότι είμαστε παιδάκια και μας εξηγεί ότι το 5 διαιρείται με τον εαυτό του δηλαδή το 5. Θα του πεις όχι; Αφού το βλέπεις ότι δεν κάνει αλλιώς. Άρα, το αποτέλεσμα που έχετε στο τέλος δεν υπονοεί ότι γνωρίζετε την ομάδα. Θα μπορούσαμε να το βρούμε ανεξάρτητα. Τώρα όμως που ξέρουμε την ομάδα, αρχίζουμε να συνδέουμε μερικά πράγματα. Η ιδέα είναι ότι όπως το 2 διαιρεί το 4, δεν θα μας ξαφνιάσει όταν ο Lagrange μάς πει ότι η τάξη της κλάσης της υποομάδας πρέπει να διαιρεί αυτήν της ομάδας. Αν το δείτε λίγο πιο αναλυτικά, θα δείτε ότι η εργασία της θα καταλήξει στο ότι τώρα μπορούμε να δούμε το θεώρημα του Lagrange. Δηλαδή, όλα αυτά μας προετοιμάζουν. Η τάξη βγάζει τη δομή της ομάδας. Δηλαδή, κοιτάς μόνο πόσα ψηφία είναι. Δεν είναι αναγκαστικά στη σειρά (δείτε στο $\mathbb{Z}_5$), αλλά το μέτρο ξέρουμε ότι είναι 5. Γι' αυτό εγώ νομίζω ότι στο βιβλίο, για το παιδαγωγικό τμήμα, είναι καλό να υπάρχει ένα παράδειγμα μέσα που να έχει το $\mathbb{Z}_5$, που για τους μαθηματικούς φαίνεται εντελώς βλακεία γιατί είναι εύκολο. Είναι λογικό, το βιβλίο να έχει ένα «χοντρό» παράδειγμα για να μπορέσει να σας δείξει τι γίνεται. Αλλά χρειάζεται και ένα απλό. Κοιτάξτε τώρα τι θεώρημα μπορούμε να βγάλουμε:

Όταν έχουμε ένα $\mathbb{Z}_{2^n}$, δηλαδή δύναμη του 2, το διάγραμμά του πρακτικά είναι μία αλυσίδα τάξης n+1. Αυτό δεν είναι τετριμμένο, αλλά μας επιτρέπει να σκεφτούμε. Αν κάνουμε τώρα με το 8 θα δούμε ότι απλώς θα βάλουμε ένα ακόμα από επάνω. Δεν θα βάλουμε κάτι ενδιάμεσο. Και μετά θα πας κατευθείαν στο 16. Παίρνοντας ένα πιο μικρό παράδειγμα, που δεν είναι εκφυλισμένο -αυτό είναι σημαντικό- μας δίνει μια ιδέα, που είναι πολύ σημαντική. Δεν είναι μικρό πράγμα αυτό που κάνουμε εδώ. Γιατί, αν σου ζητούσα να μου το κάνεις με το 127, θα έκανες όλα αυτά από το 0 ως το 126 και θα ανακάλυπτες ότι όλοι αντιπροσωπεύουν την ίδια ομάδα. Την $\mathbb{Z}_{127}$ και καμία άλλη ενδιάμεση, διότι το 127 είναι πρώτος αριθμός.



Το σκίτσο δίπλα είναι μια πολύ καλή ιδέα. Δεν σας έχει πει κανείς να το κάνετε εδώ, δεν το έχετε πραγματικά ανάγκη, αλλά βοηθά πολύ τον εγκέφαλό σας. Και στην ουσία, με το $\mathbb{Z}_{12}$ θα ανακαλύψετε μία δομή, η οποία υπάρχει και την οποία θα μπορούσατε να δείτε κάθε φορά που κοιτάτε το ρολόι σας. Αλλά εσείς δεν το έχετε δει μέχρι τώρα.

Άρα για ($\mathbb{Z}_{12}$,+)

$< \bar{1} >= \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}, \overline{11}, \bar{0}\}$

$< \bar{2} >= \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}, \bar{0}\}$

$< \bar{3} >= \{\bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \bar{0}\}$

$< \bar{4} >= \{\bar{4}, \bar{8}, \bar{0}\}$

$< \bar{5} >= \{\bar{5}, \overline{10}, \bar{3}, \bar{8}, \bar{1}, \bar{6}, \overline{11}, \bar{4}, \bar{9}, \bar{2}, \bar{7}, \bar{0}\}$

$< \bar{6} >= \{\bar{6}, \bar{0}\}$

$< \bar{7} >= \{\bar{7}, \bar{2}, \bar{9}, \bar{4}, \overline{11}, \bar{6}, \bar{1}, \bar{8}, \bar{3}, \overline{10}, \bar{5}, \bar{0}\}$

$< \bar{8} >= \{\bar{8}, \bar{4}, \bar{0}\}$

$< \bar{9} >= \{\bar{9}, \bar{6}, \bar{3}, \bar{0}\}$

$< \overline{10} >= \{\overline{10}, \bar{8}, \bar{6}, \bar{2}, \bar{0}\}$

$< \overline{11} >= \{\overline{11}, \overline{10}, \overline{9}, \overline{8}, \overline{7}, \overline{6}, \overline{5}, \overline{4}, \overline{3}, \overline{2}, \overline{1}, \overline{0}\}$

$< \overline{0} >= \{\overline{0}\}$

Ένα σχόλιο για να μπορείτε να κερδίζετε χρόνο. Όταν είστε στο 12 και αρχίζετε με τα πιο μεγάλα νούμερα (7, 8, 9, 10, 11) αντί να κάνετε πρόσθεση μπορείτε να κάνετε αφαίρεση. Δηλαδή, ας πούμε στο 8 κανονικά θα κάνετε +8. Και θα βρείτε 16 και μετά πρέπει να σκεφτείτε ότι το 16=4. Τώρα εγώ σας λέω ότι σε σχέση με το 12 το 8 δεν είναι -4; Αν από το 8 κάνεις -4 συνεχώς είναι ακριβώς το ίδιο. Διότι, είναι ομάδα, άρα έχει αντίστροφο. Εκτός από το να το κάνεις αναλυτικά, μπορείς να το κάνεις εγκεφαλικά, όταν ξεπερνά το μισό θέλει να πει ότι είναι στο -. Αλλά άμα το σκεφτούμε ακόμα πιο πολύ εξετάζεις μήπως υπάρχει κάποια συμμετρία. Το θέμα όμως είναι πώς παίζουν οι πρώτοι αριθμοί. Δεν μπορεί να υπάρχει μία απόλυτη συμμετρία. Το κόλπο είναι ότι χρησιμοποιείς κατ' ευθείαν το θεώρημα του Lagrange και όλες οι κλάσεις που είναι πρώτοι αριθμοί γράφεις ότι είναι όλη η ομάδα. Διότι, είναι οι πιο δύσκολες να τις γράφεις. Αλλά προσέξτε! Πρέπει να είναι πρώτος, πρώτος με το 12. Εδώ είναι η διαφορά. Άρα, το 2 διαιρεί, το 3 διαιρεί άρα δεν μετράνε. Κοιτάξτε όμως το 5. Θα τα έχει όλα. Επειδή δεν διαιρεί ακριβώς, αλλά κάθε φορά δεν πέφτει στον εαυτό του, πέφτει λίγο πιο πέρα, λίγο πιο πέρα και το γεμίζει όλο. Άρα το 5, το 7 και το 11 θα έχουν ακριβώς την ίδια κλάση, ακριβώς το ίδιο μέγεθος και ξέρετε ότι είναι ακριβώς όλη η ομάδα. Άρα, για να το κάνετε πιο σύντομα, λέτε ότι αρχικά το 1 είναι σίγουρο ότι είναι όλη η ομάδα. Μετά βλέπετε αυτούς που είναι του τύπου πρώτος και πρώτος με το n, θα είναι ακριβώς η ίδια. Άρα δεν τους γράφετε καθόλου. Αυτό όμως, δικαιούστε να το κάνετε όταν έχετε καταλάβει ότι είναι θέμα διαιρέτη, ότι είναι θέμα τους θεωρήματος του Lagrange. Εμείς δεν έχουμε φτάσει ακόμα. Τώρα το κάνουμε για να καταλήξουμε εκεί. Από μαθηματική άποψη, δεν σας βάζω να κάνετε αναλυτικά μέχρι το 12 επειδή θέλω να δω πώς συμπεριφέρεστε ζωολογικά. Είναι ότι μια φορά στη ζωή σας πρέπει να το κάνετε έτσι για να αντιληφθείτε γιατί στο βιβλίο είναι γραμμένο ένα τόσο συμπαγές πράγμα. Άρα τώρα θα κάνεις τις ταυτότητες. Διαβάζετε το 1 και γράφετε ποια είναι ίδια. Μετά πάτε στο 2 και συνεχίζετε.

$< \overline{1} >=< \overline{5} >=< \overline{7} >=< \overline{11} >= \mathbb{Z}_{12}$

$< \overline{2} >=< \overline{10} >$

$< \overline{3} >=< \overline{9} >$

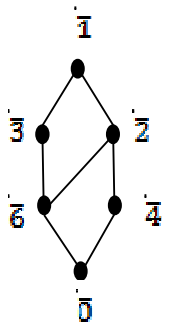
$< \overline{4} >=< \overline{8} >$

Το 2 έχει 6 στοιχεία. Αν δείτε προσεκτικά θα καταλάβετε ότι το 2 έχει 6 γιατί 2*6=12. Στο 1 έχει 12 επειδή 12*1=12. Όταν έχω 3, έχω 4. Καταλαβαίνετε, λοιπόν, ότι ο Lagrange δεν ήταν ο βλάκας. Σε κάποια φάση καταλάβαινε ότι κάτι υπάρχει εδώ. Για να είμαστε σοβαροί, πρέπει να παραδεχτούμε ότι δεν χρησιμοποιήσαμε

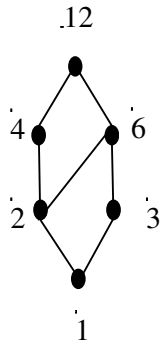
ακόμα τη θεωρία ομάδων. Βάλαμε μόνο μία ζωγραφιά. Εμείς είμαστε στο 1771, δεν καταλαβαίνουμε τι σημαίνει αυτή η ζωγραφιά, και κάνουμε όσα κάναμε μέχρι τώρα και βλέπουμε ότι όλα αυτά πολλαπλασιάζονται ακριβώς με τον ίδιο αριθμό. Μετά αναρωτιέσαι τι είναι αυτό το πράγμα. Μετά όταν έρχεται ο Galois και σου λέει ας το ονομάσουμε αυτό, εφαρμόζετε το προηγούμενο θεώρημα.

Κανονικά θα έπρεπε να μου πείτε ότι αυτό που σας έλεγα, με το 10 σε σχέση με το 12 δεν εφαρμόζεται. Ναι, αλλά ξεχνάτε ότι το 10 με το 12 δεν είναι καθαροί μεταξύ τους. Μετά αρχίζουν άλλα προβλήματα. Πρώτον, δεν μπαίνει ο ένας μέσα στον άλλον, και δεν μπαίνει ο ένας μέσα στον άλλον γιατί επιπλέον έχουν έναν κοινό παράγοντα. Άρα, δεν μπορούν να παίξουν επειδή είναι πρώτοι μεταξύ τους. Καταλάβατε τώρα; Υπάρχουν δύο μεγάλες τάξεις αριθμών σε αυτό που κάνουμε τώρα. Είναι αριθμοί που είναι πρώτοι με τον αριθμό, άρα αυτοί είναι εύκολοι γιατί είναι όλη η ομάδα, και είναι και οι αριθμοί που διαιρούν αυτόν τον αριθμό, άρα αυτοί θα αποτελέσουν την υποομάδα. Και μετά είναι και οι άλλοι που κάνουν ό,τι να 'ναι .

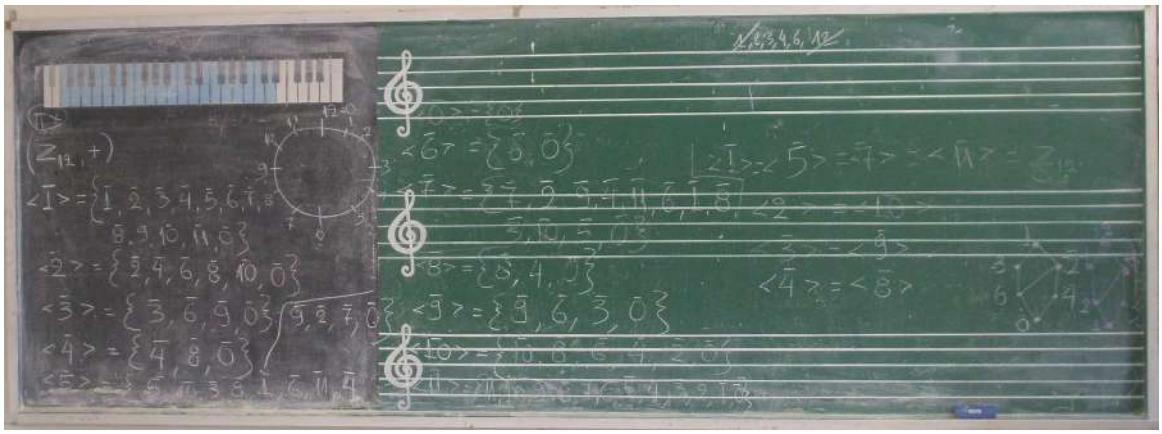
Επιστρέφω σε αυτό που έγραψε η συμφοιτήτρια σας λίγο πριν. Όταν έχεις αυτόν τον πίνακα δεν βλέπεις ακριβώς την δομή της ομάδας σου. Γι' αυτό κάνεις το διάγραμμα.

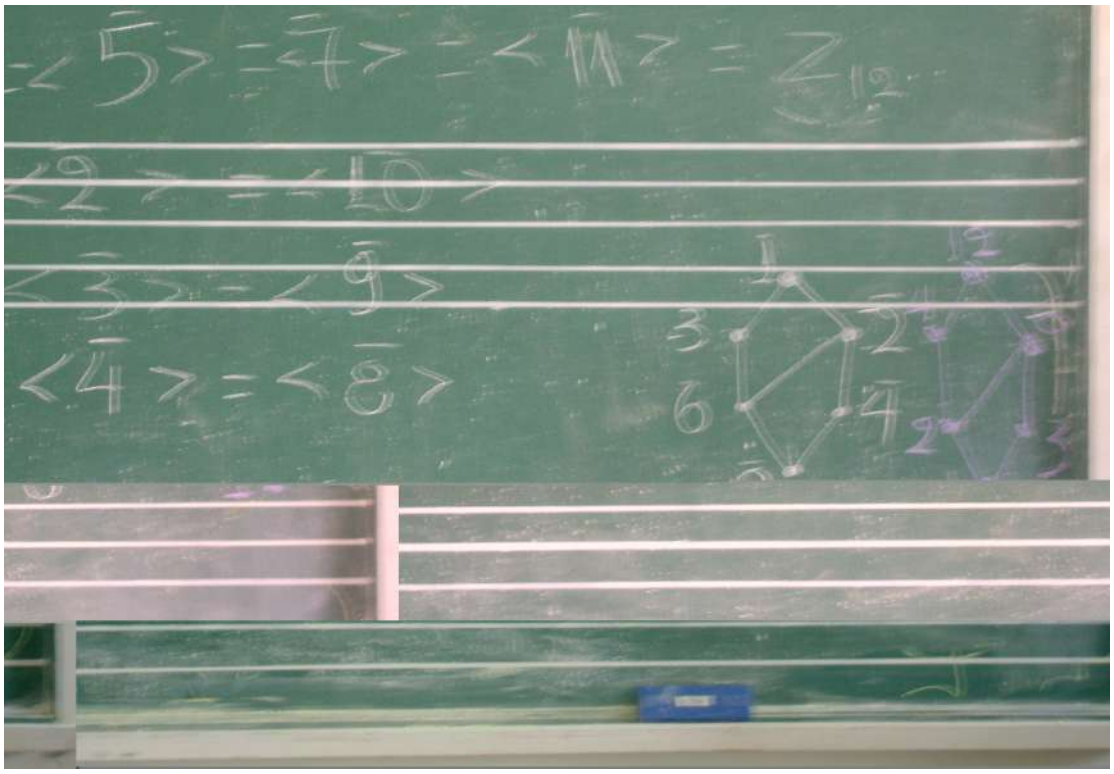


Τώρα θέλω να το ξαναγράψεις δίπλα, αλλά δεν είναι ακριβώς μαθηματικός τρόπος. Άρα, θέλω να γράψεις του διαιρέτες του 12



Δηλαδή, 1, 2, 3, 4, 6,12. Έχεις 6 διαιρέτες. Το 1 ξέρουμε ότι είναι κάτω και το 12 επάνω. Έπειτα, έχουμε το 2 και το 4. Προσέξτε, το 6 διαιρείται με το 2 και το 3. Άρα το 4 και το 6 είναι στο ίδιο επίπεδο. Και από κάτω βάζουμε το 2 και το 3.





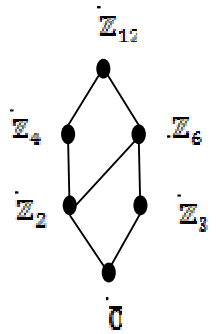
Άρα, πρέπει να συμφωνείτε όλοι, μέχρι τώρα έχουμε καταλάβει ότι τα δικτυωτά διαγράμματα μας επιτρέπουν να δούμε τη δομή μιας ομάδας. Αυτό έχει ενδιαφέρον. Μέχρι τώρα τι ομάδες είδαμε;

Βρήκαμε ότι υπάρχουν οι ομάδες $\mathbb{Z}_p$ οι οποίες έχουν διάγραμμα αυτό:

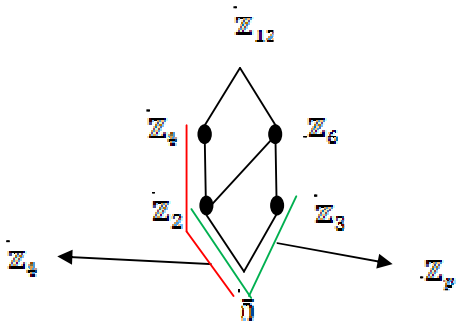
Βρήκαμε ότι υπάρχουν ομάδες $\mathbb{Z}_{2^n}$, οι οποίες έχουν σαν διάγραμμα αλυσίδα τάξης n+1.

Τώρα βρήκαμε αυτήν που δεν μοιάζει με τις άλλες:

η οποία είναι η $\mathbb{Z}_{12}$.



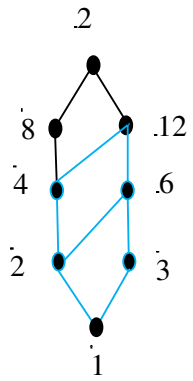
Στις πρώτες δύο οι υποομάδες είναι του ίδιου τύπου. Στην τελευταία, όμως, του $\mathbb{Z}_{12}$ μας εμφανίζονται άλλες υποομάδες του τύπου $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_6$. Άρα, αυτό που έχει ενδιαφέρον, είναι ότι μία ομάδα με τα δικτυωτά διαγράμματα, τα poset στην ουσία, σας επιτρέπει να δείτε και πώς λειτουργούν και όλες οι υποομάδες από κάτω της. Άρα, είναι πολύ σημαντικό όταν οργανώνετε κάτι να το βλέπετε έτσι. Βλέπετε ότι τα p δεν είναι πολύ οργανωτικά. Για να το κοιτάξουμε και λίγο διαφορετικά. Μέσα στην $\mathbb{Z}_{12}$ που βλέπουμε τις άλλες ομάδες; Στο σχήμα με το πράσινο θα ζωγραφίσω την $\mathbb{Z}_p$. Θέλω να δείτε πώς θα συσσωρευτεί η γνώση σας. Τον $\mathbb{Z}_4$ τον βρίσκουμε και αυτόν. Είναι στο σχήμα το κόκκινο κομμάτι. Μπορεί να μην βάζουμε 4 και δύο, αλλά είναι αυτός. Το αναγνωρίζετε;



Άρα, αν το σκεφτείτε καλά, θα μπορούσατε να κάνετε κάτι που έχει πολύ ενδιαφέρον σαν διαδικασία. Ας πούμε, εγώ σας ζητώ να μου ζωγραφίσετε το διάγραμμα από όλα τα $\mathbb{Z}$ του 30. Στην αρχή τα βλέπετε ξεχωριστά. Αλλά μετά καταλαβαίνετε ότι μέσα στο 30 θα είναι μέσα και αυτά που κάναμε, άρα θα πρέπει να εμφανιστούν στο επόμενο. Κανονικά, στην θεωρία ομάδων λειτουργούσε αυτό όλο και πιο πάνω. Και έτσι δημιουργήσαμε το τέρας, στις σποραδικές ομάδες. Μιλάμε για εκατομμύρια στοιχεία, όχι χιλιάδες. Και αυτό, αν θέλετε, είναι ένα poset poset. Διότι, εδώ έχετε υπο-poset. Άρα, αυτό που μάθαμε στην αρχή είναι μέσα στο επόμενο. Όταν κάνω μία ομάδα που να πολλαπλασιάζεται με το 12 όλο αυτό που κάναμε για το $\mathbb{Z}_{12}$ θα είναι

όλο μέσα. Δεν θα λείπει τίποτα. Θα τα βλέπετε λίγο σαν τα lego. Αλλά θα ξέρετε, ότι μόλις αυτά σχηματίσουν μία δομή χαμηλά, θα ξέρετε ότι και πιο πάνω θα υπάρχει αυτή η δομή όπως αρχικά είναι. Σαν να είναι έτοιμο από προηγούμενη κατασκευή και το χρησιμοποιούμε αυτούσιο. Ας το κάνουμε σαν παράδειγμα. Θέλω να κάνουμε το $\mathbb{Z}_{24}$. Αυτό σε σχέση με το $\mathbb{Z}_{12}$ τι έχει; Ας το κάνουμε απλά. Ποιοι είναι οι διαιρέτες του 23; 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24. Αυτό που θα κάνουμε είναι μία κομπίνα.

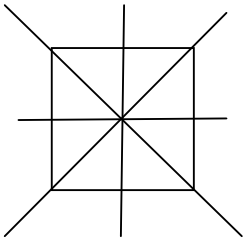
Άρα, θα βάλουμε το 24 επάνω και το 1 κάτω. Ενδιάμεσα, πρέπει να το οργανώσετε έτσι ώστε να εμφανιστεί από κάτω του το $\mathbb{Z}_{12}$ (με το σιέλ χρώμα στο σχήμα). Στο ίδιο επίπεδο που διαιρεί το 24 αλλά δεν διαιρεί το 12 είναι το 8.



Συχνά, έχετε την τάση να θεωρείτε ότι τα μαθηματικά όσο ανεβαίνουν επίπεδο είναι όλο και πιο «χοντρά». Αλλά, εμείς τα ξαναμαζεύουμε. Ενώ ανεβαίνουμε, τα συμπιέζουμε. Τώρα, αν σας ζητήσω το $\mathbb{Z}_{36}$ δεν θα σας φανεί θεότρελο επειδή είναι τόσο μεγάλο νούμερο.

Κανονικά θα έπρεπε να μου κάνετε μια άλλη ερώτηση. Όταν έχουμε μία ομάδα μπορούμε πάντα να κάνουμε μία αναπαράσταση με αυτόν τον τρόπο. Όταν έχουμε μία αναπαράσταση μπορούμε να βρούμε την ομάδα; Σε αυτό μπορούμε να απαντήσουμε θετικά από το 1946. Ο Garrett Birkhoff ένας πολύ μεγάλος μαθηματικός από την Αργεντινή το δημοσίευσε στα ισπανικά.

Μέχρι τώρα έχουμε μάθει μια τεχνική *για να βρίσκουμε το δικτυωτό διάγραμμα *έτσι ώστε να μας δώσει μια πληροφορία. Όλες αυτές οι ομάδες μπορεί να σας φαίνονται εύκολες, ή ότι τις επέλεξα εγώ για να τις κάνουμε. Ας κάνουμε τώρα μία ομάδα που την έκανε η συμφοιτήτριά σας σε προηγούμενο μάθημα. Δηλαδή, θα πάρουμε το τετράγωνο που το είχαμε πάρει την άλλη φορά και βρήκαμε *(ότι) 8 στοιχεία, που είναι οι μετασχηματισμοί. Εδώ καταλαβαίνετε γιατί έπρεπε να προηγηθεί η δική της εργασία από αυτήν που παρουσιάζεται εδώ σήμερα. Άρα, έχουμε 8 στοιχεία εκ των οποίων 1 είναι το ταυτοτικό, 4 συμμετρίες και άλλες 3 περιστροφές.



<u>8 στοιχεία</u>

1 ταυτοτικό: αυτό το ονομάζουμε I.

4 συμμετρίες

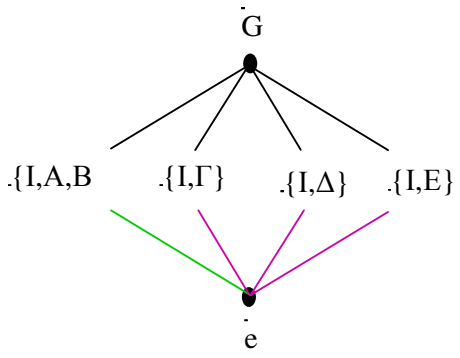
3 περιστροφές: αυτές είναι οι: π/2, π, 3π/4

Για να μην μπερδεύεστε, οι περιστροφές είναι 4, αλλά μέσα σε αυτές μετράμε και την ταυτοτική. Άρα, υπάρχουν 3 υποομάδες με στοιχεία όλη την ομάδα, οι περιστροφές και 5 υποομάδες με 2 στοιχεία. Γιατί να υπάρχουν 5 υποομάδες; Αυτό από πού βγαίνει; Ας πούμε ότι κάνει λάθος. Θα το ψάξουμε μόνοι μας, όπως μάθαμε μέχρι τώρα. Το 8 πόσους διαιρέτες έχει; 1, 2, 4, 8. Κανονικά αυτό είναι περίεργο. Σας λέει ότι έχει 5 υποομάδες με δύο στοιχεία, ενώ εσείς βρίσκετε 4 διαιρέτες. Τώρα, έχουμε δύο πράγματα. Τη θεωρία που έκανε η Μαρία με τα πράγματα που μετακινούνται και τη θεωρία που έκανε η Βάσω με τις κυκλικές. Κανένας δεν σας είπε ότι είναι αναγκαστικά κυκλικές. Στην πραγματικότητα, σας είπα μάλιστα ότι είναι διεδρικές, που δεν έχουν καμία σχέση με τις κυκλικές. Άρα, το ξανακάνουμε και με το τρίγωνο. Αν θυμάστε, με το τρίγωνο είχαμε 6, μία ταυτοτική και 3 συμμετρίες. Τι υπονοούμε όταν λέμε υποομάδα. Αυτές που μπορούμε να καταλάβετε εύκολα εσείς είναι οι αλυσίδες που κάναμε πριν. Αλλά τώρα, πρέπει να βρούμε ένα άλλο σχέδιο. Ας κάνουμε πρώτα το τρίγωνο: 1 ταυτοτική, 2 περιστροφές, 3 συμμετρίες.

Για το τρίγωνο: G={I, A, B, Γ, Δ, E}. Οι συμμετρίες είναι υποομάδες με δύο στοιχεία. Ας πούμε {I,Γ}, {I,Δ}, {I,E}. Σκεφτείτε το καλά. Αυτές που είναι τάξης 2 είναι αναγκαστικά οι συμμετρίες. Γιατί είναι τάξης 2; Γιατί κάνει μία συμμετρία και ακόμα μία και επιστρέφει στην ταυτοτική. Άρα, αν θέλουμε να τις γράψουμε όπως τις γράφαμε εμείς, σημαίνει ότι είναι a και e. Διότι το a^2 μας κάνει e, το ουδέτερο. Άρα, αυτές εδώ (με τα δύο στοιχεία) είναι του τύπου $\mathbb{Z}_2$. Στην πραγματικότητα, αυτή είναι η S_2. Η συμμετρική ομάδα είναι αυτή που τα μετακινεί όλα. Η τάξη της συμμετρικής ομάδας είναι n!. $|S_n| = n!$

Όμως, όταν έχω μόνο δύο στοιχεία, εκφυλίζεται η ομάδα και μοιάζει με την κυκλική. Αν είχα 5 δάχτυλα και είχα δικαίωμα να μετακινήσω τα δάχτυλα όπως θέλω, θα είχα S_5 και θα είχα 120 περιπτώσεις. Ενώ με το κυκλικό έχω μόνο 5. Σε αυτές που έχουμε βρει ήδη είναι οι S_2 , που στην πραγματικότητα, *(για μας) μοιάζει με τη $\mathbb{Z}_2$. *(αλλά δεν μας ενδιαφέρει). Αυτές που δεν είναι αυτού του τύπου, ποιες είναι; Είναι η περιστροφή. Με τις τρεις περιστροφές στην πραγματικότητα έχουμε ένα $\mathbb{Z}_3$. Αυτό ξέρουμε να το κάνουμε γιατί είναι πρώτος. Αυτές με τα δύο στοιχεία, έχουν το ουδέτερο και την περιστροφή. Άρα και αυτές ξέρετε να τις κάνετε γιατί είναι τέτοιου τύπου:

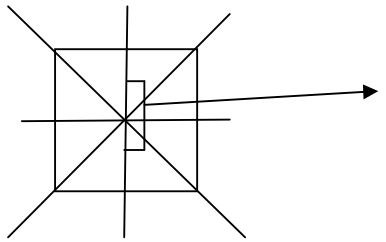
Το $\mathbb{Z}_3$ είναι και αυτό τέτοιου τύπου διότι είναι πρώτος. Αυτά εδώ, είναι από τις χειρότερες περιπτώσεις διότι δεν καταλαβαίνετε πώς μπαίνουν η μία μέσα στην άλλη. Αυτές οι τρεις, {I,Γ}, {I,Δ}, {I,E}, καταλαβαίνετε ότι είναι τρεις συμμετρίες. Και η {I,A,B} είναι η περιστροφή. Μόνο που δεν συγκρίνονται. Εφόσον δεν συγκρίνονται, πρέπει στο διάγραμμα να είναι στο ίδιο επίπεδο.



Αυτό το σχήμα μάς λέει ότι, στην ουσία από τις συμμετρικές πας κατ' ευθείαν στην ομάδα. Δεν έχεις τίποτα το ενδιάμεσο. Και από τη $\mathbb{Z}_3$ πάλι πας στην ομάδα. Αν το σκεφτείτε καλά, αυτές που είναι με χρώμα βιολέ είναι οι πρώτες που είδαμε και το πράσινο είναι η $\mathbb{Z}_3$. *(Θα μου πείτε, γι' αυτό δεν καταλαβαίνουμε τίποτα. Να μην κοιτάζετε μόνο τα κεφάλια, να κοιτάζετε και τον κώλο. Όλες έχουν τον ίδιο κώλο. Το ουδέτερο στοιχείο. Διότι,) * Όλες ξεκινάνε με το ουδέτερο στοιχείο. Δεν μπορούν να μην το έχουν διότι είναι ομάδα. Κατά συνέπεια, όταν εγώ σας είπα ότι είναι ομάδα από την αρχή, ενώ θεωρείτε ότι δεν έχετε πολλές πληροφορίες, έχετε ήδη ζωγραφίσει

το κάτω μέρος. Εφόσον το κάνουμε αυτό, στο πάνω μέρος είναι αυτονόητο ότι καταλήγουν στο ίδιο. Εφόσον είναι ομάδα, δεν μπορεί να μη δένονται ως ομάδα. Άρα, τελειώσατε. Δεν είναι καθόλου το ίδιο διάγραμμα. Αλλά θέλω να σας πω ότι αν με την τεχνική που είδαμε προηγουμένως αρχίζετε και τα συμμαζεύετε λίγο, με μια ομάδα που δεν έχει καμία σχέση με αυτά που κάναμε, πάλι μπορείτε να βγάλετε μερικά πράγματα και να τα συναρμολογήσετε.

Τώρα που είμαστε πιο προετοιμασμένοι, πάμε να δούμε και το τετράγωνο. Τι μας είπε μέχρι τώρα η συμφοιτήτριά σας; Ότι έχουμε 4 συμμετρίες. Εφόσον είναι συμμετρίες, αναγκαστικά είναι στο πρώτο επίπεδο πάνω από το ουδέτερο στοιχείο. Μετά η ταυτοτική δεν μας απασχολεί και έχουμε 4 περιστροφές. Εδώ στην πραγματικότητα, ποιες είναι οι περιστροφές; Στο ενδιάμεσο, αν δεν μετρήσετε τον πάτω και την κορυφή έχετε 8 σημεία. Οι περιστροφές εδώ έχουν τη συμμετρία από κάτω. Προηγουμένως δεν μπορούσαμε να τη σπάσουμε. Είναι απλό. Εφόσον εδώ υπάρχει $\mathbb{Z}_4$ κάπου πιο κάτω πρέπει να υπάρχει και $\mathbb{Z}_2$. Ενώ πριν στο τρίγωνο δεν υπήρχε. Άρα, κάτω από την περιστροφή που είναι $\mathbb{Z}_4$, στο κάτω επίπεδο, θα έχετε ένα $\mathbb{Z}_2$ που σε σχέση με τις συμμετρίες είναι αυτή το πέμπτο στοιχείο. Με άλλα λόγια, κάτω έχετε πέντε σημεία. Στην πραγματικότητα, έχετε τη μία περιστροφή και επιπλέον και τις τέσσερις συμμετρίες. Άρα, κάτω το πεντάρι το αναλύεται σε τέσσερις συμμετρίες και μία περιστροφή, ενώ επάνω έχετε τις περιστροφές. Δείτε το αλλιώς, γιατί βλέπω ότι δεν το καταλαβαίνετε. Μία συμμετρία δεν μπορεί παρά να έχει δύο στοιχεία. Εφόσον κουνιέμαι και ξανακουνιέμαι και επανέρχομαι. Το θέμα είναι ότι μέσα σ' αυτές είναι και η περιστροφή $\mathbb{Z}_2$ (π) που δεν φαίνεται να είναι διαφορετική από τα S.

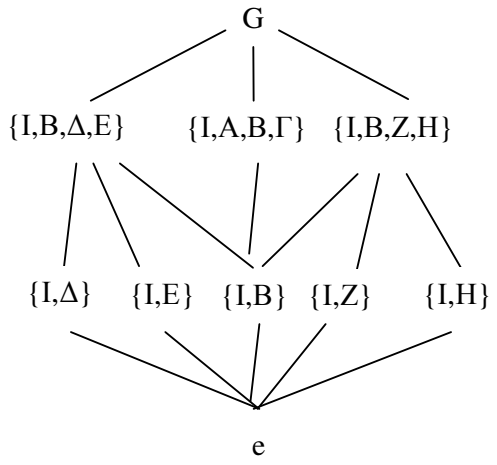


Αν θέλετε να το κάνουμε πιο αναλυτικά με ομάδες, είναι ότι έχω τέσσερις S_2 και μία $\mathbb{Z}_2$. Η περιστροφή αυτή έχει και αυτή δύο στοιχεία όπως οι συμμετρίες. Γι' αυτό και μπερδεύεστε. Αν έχω μία περιστροφή π/2 θα *(μου) κάνει/περιστραφεί μία φορά, ακόμα μία φορά και ακόμα μία και μετά θα επιστρέψει όπως ήταν. Άρα, έχει 4 σημεία. Τώρα ας πούμε ότι παίρνω π. Κάνει μία φορά το μισό τετράγωνο και ακόμα μία και επιστρέφει. Αν κάνω με 3π/4 είναι σαν να κάνω –π/2. Αλλά και αυτή παράγει αρκετές ομάδες.

Αυτό που σας μπερδεύει είναι η ότι το S_2 και το $\mathbb{Z}_2$ είναι το ίδιο. Η περιστροφή με π είναι σαν να είναι συμμετρία. Ενώ σαν οντότητα δεν είναι καθόλου το ίδιο. Γιατί από τις περιστροφές είναι η μόνη που τη δεύτερη φορά επιστρέφει στην αρχική θέση. Γι'

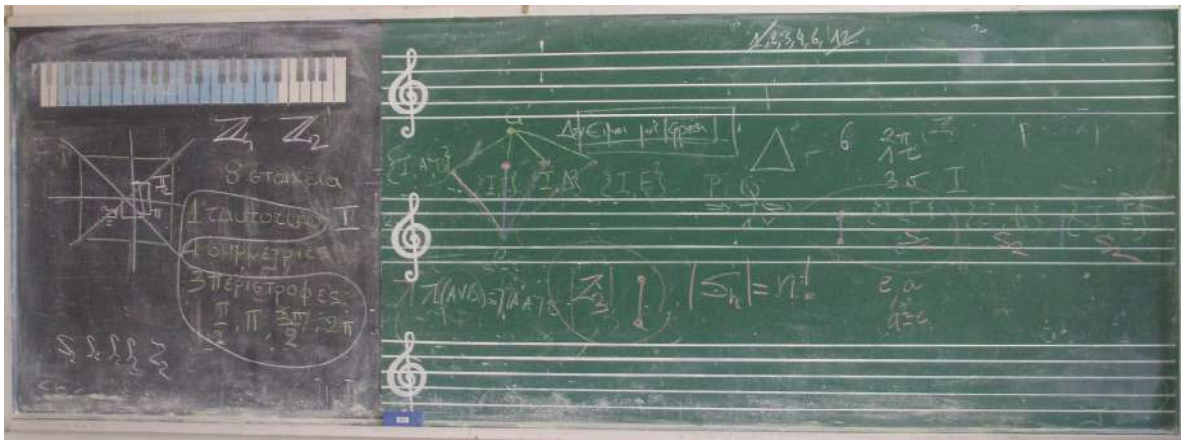
αυτό εμφανίζεται αυτή και σας μπερδεύει. Επιπλέον, μπερδεύετε τα στοιχεία με το μετασχηματισμό πάνω στα στοιχεία. Δηλαδή, η περιστροφή π/2 παράγει 4 στοιχεία. Η π δύο. Γι' αυτό είναι από κάτω.

Μπερδεύετε τα στοιχεία του τετραγώνου (ΑΒΓΔ) που είναι 4 στοιχεία, με το αποτέλεσμα του μετασχηματισμού παραδείγματος χάρη του Α που είναι περιστροφή. Άρα κάθε ΑΒΓΔ εδώ δεν είναι ένα στοιχείο του τετραγώνου όπως κάναμε σε περασμένο μάθημα, αλλά το αποτέλεσμα κάποιου μετασχηματισμού ή συμμετρίας πάνω σε αυτά τα στοιχεία. Δεν είναι το ίδιο.



Αν δεν είχαμε κάνει τις εργασίες και όλα αυτά που είπαμε μέχρι τώρα, η κουβέντα αυτή που σας φαίνεται οριακή αυτή τη στιγμή, θα σας ήταν αδιανόητη πριν. Γιατί τώρα αρχίζετε να καταλαβαίνετε ότι υπάρχουν διάφορα στρώματα. Στη φράση *Είμαι μία φράση,* η φράση πού είναι; Είναι όλο ή είναι μόνο η λέξη «φράση»; Είναι το μπέρδεμα που έχετε τώρα. Μπορεί να είναι και στο ένα και στο άλλο. Όταν ακουμπάς στη λέξη «φράση» είσαι και στα δύο. Για να το κάνουμε ακόμα πιο δύσκολο, στη φράση *Δεν είμαι μία φράση,* πού είναι η φράση; Εδώ την πάτησες γιατί αν πεις ότι είναι φράση, δεν είναι, ενώ αν πεις ότι δεν είναι, είναι. Αυτή τη μεθοδολογία χρησιμοποίησε ο Gödel. Το πρόβλημα είναι ότι μπερδεύετε το συντακτικό με το σημασιολογικό. Εδώ, μπερδεύετε τα στοιχεία που είναι στοιχεία και τα στοιχεία που είναι αποτελέσματα του μετασχημαστισμού των στοιχείων. Είναι όπως στη λογική. Ας πούμε ότι θέλω να χτενίσω ένα κεφάλι με μία χτένα που αντί για «δόντια» έχει τρίχες. Την ώρα που χτενίζω, ποιος χτενίζει ποιον; Κάποιες τρίχες ανήκουν στη χτένα και κάποιες στο κεφάλι. Είναι εδώ που το ένα ανήκει στο ένα και το άλλο στο άλλο, άσχετα αν φαίνονται ίδια. Αυτό που σας λέω τώρα το χρησιμοποιούμε στη λογική. Εκεί έχουμε προτάσεις p q και χρησιμοποιούμε σύμβολα τα οποία εκφράζουν κάτι. Νοητικά έχει μία διαφορά, αλλά μαθηματικά δεν φαίνεται. Είναι το πρόβλημα που έχετε τώρα. Τα βλέπετε όλα ως στοιχεία και βλέπετε ότι οι μετασχηματισμοί ξαναβγάζουν στοιχεία. Αλλά δεν βλέπετε ότι ο μετασχηματισμός του στοιχείου

παράγει μία ομάδα που είναι τα αποτελέσματα του μετασχηματισμού και όχι τα πρώτα στοιχεία.



http://www.lygeros.org/Images/0062/0062-Construction_de_posets_dont_le_groupe_d_automorphismes_est_isomorphe_a_un_groupe_donne-04.jpg

http://genealogy.math.ndsu.nodak.edu/id.php?id=16942