Η ομάδα των κουατέρνιων

Νίκος Λυγερός

Θεώρημα Lagrange

$\forall\, H \subseteq G: |H| \,/\, |G|$ (η τάξη της υποομάδας H διαιρεί την τάξη της ομάδας G)

Πόρισμα 1

Έστω $|G| = p \in \Pi$

$\nexists\, H, \{e\} \neq H \subset G$

Λήμμα

$\forall\, n \in \mathbb{N}, \exists\, (\mathbb{Z}_n, \cdot)$

Πόρισμα 2

Έστω $n = p$ άρα $\exists\, \mathbb{Z}_p$ και δεύτερον από το Πόρισμα 1

$\exists\, \gamma, \gamma\varepsilon\nu\nu\acute{\eta}\tau o\rho\alpha\varsigma / G = <\gamma>$ άρα

$G \simeq \mathbb{Z}_p$

Είναι ενδιαφέρον, γιατί μόνο από την πληροφορία της τάξης ερχόμαστε στο πλαίσιο της ομάδας. Αυτό είναι πολύ σημαντικό.

Παρατήρηση

Ας πούμε ότι παίρνουμε $|G|$=p, ξέρουμε ότι έχει $|\mathbb{Z}_p|$=p. Μέσω του Lagrange περνάμε στις ομάδες $G \simeq \mathbb{Z}_p$.

$|G| = p = |\mathbb{Z}_p|$ (τάξεις) μέσω Lagrange

$G \simeq \mathbb{Z}_p$ (ομάδες)

Θέλω να αναφερθούμε στις ομάδες Sylow (L. Sylow, 1832-1916, Νορβηγός).

«Το θεώρημα Lagrange δίνει μία αναγκαία συνθήκη για την τάξη μίας οποιασδήποτε ομάδας, λέγοντας ότι η τάξη της υποομάδας διαιρεί την τάξη της ομάδας. Το αντίστροφο δεν ισχύει. Δηλαδή, η συνθήκη δεν είναι ικανή: για κάθε διαιρέτη s της τάξης της ομάδας n , δεν είναι σίγουρο ότι μπορούμε να βρούμε υποομάδες της που να έχει s στοιχεία[1].»

Για να το καταλάβουμε καλύτερα αυτό, ας πούμε ότι δεν είμαστε στο χώρο των $\mathbb{Z}_n$ αλλά στο χώρο γενικά των G. $|G| = n = p \cdot q$.

Άρα, εσύ τι ξέρεις; Αν $\exists\, H / H \subset G\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\, |H| \,/\, |G|$ (Lagrange). Το θέμα όμως είναι υπάρχει H; Δεν είναι trivial. Δεν είναι σίγουρο ότι έχουμε υποομάδες. Θυμίζω ότι είμαστε γενικά στο G. Όταν είμαστε στις κυκλικές όλα αυτά είναι σίγουρα. Γι' αυτό δεν μπήκα εδώ. Τώρα θα μου πείτε, πού υπάρχει αυτό; Ο χώρος του Hamilton, δηλαδή η γενίκευση των μιγαδικών αριθμών στο χώρο με τέσσερις διαστάσεις αποτελεί μία ομάδα μη αβελιανή, η οποία είναι της τάξης 8. Ουσιαστικά, δεν είναι μία ειδική κατηγορία ομάδων, αλλά μία γενική. Οι κυκλικές είναι μια ειδική κατηγορία ομάδων. Ας κάνουμε μια μικρή επανάληψη. Ας δούμε στον παρακάτω πίνακα ποιος είναι ποιος. Βάζω με κόκκινο τις πρώτες ομάδες. Αυτό είναι απλό. Στο $\mathbb{Z}_4$ έχω την $\mathbb{Z}_4$ και την $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Στην $\mathbb{Z}_6$ έχουμε την $\mathbb{Z}_6$ και την $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$. Μέχρι το 7, λες ότι ο κόσμος είναι μόνο με κυκλικές. Μετά αρχίζουν τα προβλήματα. Άρα, στο $\mathbb{Z}_8$ έχετε τις $\mathbb{Z}_8$, την $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$, την $(\mathbb{Z}_2)^3$ και -αλλάζω χρώμα- ακολουθεί το $\mathbb{D}_4$. Για όσους δεν το θυμάστε, αν και το αναφέραμε, είναι οι διεδρικές ομάδες.

#n	
2	$\mathbb{Z}_2$
3	$\mathbb{Z}_3$
4	$\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
5	$\mathbb{Z}_5$
6	$\mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$
7	$\mathbb{Z}_7$
8	$\mathbb{Z}_8, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4, (\mathbb{Z}_2)^3,$

[1] Θ. Βουγιουκλής, Θεωρία Ομάδων και Εφαρμογές, 1991

	$\mathbb{D}_4, \mathbb{Q}_4$

Ουσιαστικά, παίρνω ένα τετράγωνο, παράγω τους μετασχηματισμούς και αυτοί αποτελούν μία ομάδα που είναι κυκλική. Βλέπετε ότι όταν σας το λέω έτσι, το ξέρετε γιατί το έχουμε δει μαζί. Δηλαδή, δεν ξέρατε ότι το ξέρατε. Αυτό είναι ο προβληματισμός της μαιευτικής. Στη μαιευτική δεν κάνω μια αποκάλυψη, κάνω μία ανακάλυψη. Και στην πραγματικότητα κάνω μία επανανακάλυψη. Δηλαδή, είχα ήδη τη γνώση, δεν ήξερα ότι είναι αυτό και έρχεται ένας δάσκαλος και μου εξηγεί ότι αυτό που ξέρω συνδυάζοντάς το με ένα άλλο πράγμα που ξέρω αποτελεί μία νέα γνώση την οποία είχα από πριν. Σας έχω πει κι άλλη φορά, θυμάμαι μια μέρα που κάποιος τεχνίτης άλλαζε πλακάκια στο μπάνιο μου και ήθελα να δω αν αυτός που το έκανε ήξερε το θεώρημα του διπλασιασμού του τετραγώνου. Αυτός ήξερε να διαιρεί. Τον ρώτησα: αν έχεις ένα πλακάκι που είναι τετράγωνο και θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε το μισό από το εμβαδόν του πρώτου. Τι κάνεις; Μου λέει: είναι απλό. Σπας τις τέσσερις γωνίες. Δεν μπορούσε όμως να επινοήσει αυτό που είχε κατανοήσει. Δηλαδή, είχε κατανοήσει ότι όταν έχεις ένα πλακάκι και σπάσεις τις τέσσερις γωνίες έχει ένα νέο με το μισό εμβαδόν του πρώτου. Όταν όμως εγώ του έλεγα να κάνει το διπλάσιο μου έλεγε ότι αυτό δεν γίνεται. Γιατί δεν μπορείς να φτιάξεις ένα πλακάκι. Δεν έβλεπε τον προβληματισμό. Ενώ, εμείς μαθηματικά ξέρουμε ότι ακριβώς η λύση του ενός είναι η λύση του άλλου, αυτός δεν το αντιλαμβάνεται ότι το γνωρίζει. Απλώς εσείς μπορείτε να δώσετε και μία μοντέρνα εκδοχή η οποία είναι πιο υλιστική. Γιατί για να σπάσεις κάτι που έχεις είναι απλό ως νοητικό σχήμα. Αλλά να έχεις μία ύλη και να ζητάς το διπλάσιο δεν μπορεί. Αντίθετα, μαθηματικά το νοητικό αυτό σχήμα αντέχει την αντιστροφή. Αυτό είναι πολύ σημαντικό και συμβαίνει πολύ συχνά στα μαθηματικά. Έχουμε ένα σχήμα που είναι πιο βαθύ από ό,τι χρειάζεσαι και δεν μπορείς να δεις όλες τις επιπτώσεις. Για όσους δεν κατάλαβαν, όλα αυτά είναι μία αναφορά στον πλατωνικό διάλογο του Μένονα, όπου εξέταζε πώς να διπλασιάσει ένα τετράγωνο χρησιμοποιώντας τη διαγώνιο. Και για αυτά που μελετάμε εδώ, έχω το θεώρημα του Lagrange. Ενώ έχω μία ισότητα της τάξης, τελικά καταλήγω να έχω μία ισότητα της ομάδας. Αυτό, βέβαια, μόνο και μόνο στις κυκλικές ομάδες. Ενώ, στην τάξη 8 έχουμε 5 ομάδες που είναι διαφορετικές. Από τις μικρές ομάδες είναι αυτή με τις περισσότερες. Άρα, το

$\mathbb{D}_4$ είναι η εργασία που είδαμε σε προηγούμενο μάθημα. Επιπλέον, έχουμε και την $\mathbb{Q}_4$. Τι είναι αυτή, ξέρετε;

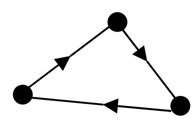
Τα κουατέρνια (quaternions). Δημιουργός Hamilton, ενώ για τα οκτώνια ο Cayley, ο οποίος θα κάνει τη γενίκευση με τη μεθοδολογία του Hamilton για τα οκτώνια. Άρα, τα κουατέρνια είναι μία ομάδα τάξης 8 και το πιο σημαντικό από όλα είναι ότι είναι η πιο μικρή μη αντιμεταθετική ομάδα. Είναι πολύ σημαντικό αυτό. Αν ο κόσμος σας σταματούσε στο 7, θα λέγατε ότι υπάρχουν μόνο αβελιανές. Είναι η πιο μικρή.

- Δεν έχω ξεκαθαρίσει για ποιες ομάδες χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\mathbb{Z}$ και για ποιες το G.

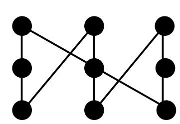
Με $\mathbb{Z}$ συμβολίζουμε τις κυκλικές. Έχεις το $\mathbb{Z}$ και δείκτης είναι η τάξη. Το G είναι οποιαδήποτε ομάδα. Έχεις ακριβώς το ίδιο πρόβλημα που είχαν οι μαθηματικοί στην ανθρωπότητα... Δεν τους ήρθαν αυτόματα οι συμβολισμοί και οι έννοιες.

- Είχα ταυτίσει στο μυαλό μου τις G με τις $\mathbb{Z}$ και τώρα βλέπω ότι πέρα από αυτές υπάρχει και ένα άπειρο που συνεχίζει.

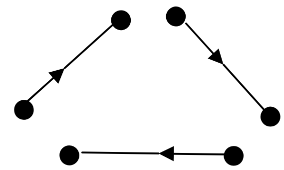
Έχεις φτάσει στο 19^{o} αιώνα. Δηλαδή, οι πρώτες ομάδες τέτοιου τύπου θα έρθουν με τον Galois. Άρα, θα είναι οι συμμετρικές και οι εναλλασσόμενες. Μπορούμε να ξαναθυμηθούμε, οι συμμετρικές (groupe symétrique) είπαμε ότι η τάξη της συμμετρικής ομάδας είναι n!. $S_n = n!$. Άρα, για να έχετε μια εικόνα της συμμετρικής ομάδας μπορείτε να πάρετε μία τελεία, από κάτω n σημεία και έχεις το δικαίωμα να κάνεις όλες τις δυνατές μεταθέσεις. Μετά, στις εναλλασσόμενες (groupe alterné), $|A_n| = \frac{n!}{2}$, οι οποίες είναι οι μισές. Υπάρχει και ένα ωραίο θεώρημα του Galois για την A_5. Η εικόνα του A_5 είναι η μπάλα του ποδοσφαίρου –μιλώ για τις πιο παλιές– η οποία αποτελείται από πεντάγωνα και εξάγωνα και η ομάδα είναι τάξης 60. Γιατί είναι 5! που σας κάνει 120/2=60. Υπάρχει μια δημοσίευση στο opus όπου: Έστω μία ομάδα, ποιο είναι το poset που είναι ισόμορφου αυτομορφισμού αυτής της ομάδας. Με τον Michel Mizony βρήκαμε τα πιο μικρά poset που αντιπροσώπευαν όλες τις κυκλικές πρώτες ομάδες. Παρενθετικά, το πρόβλημα που λύνω τώρα είναι ότι ξέρουμε ότι υπάρχει poset τέτοιο ώστε η ομάδα αυτομορφισμού του poset να ισούται με ένα G. Δηλαδή: $\forall G, \exists P / Aut(P) \simeq G$. Αυτό είναι θεώρημα για το οποίο μιλήσαμε σε προηγούμενο μάθημα, είναι το θεώρημα του G. Birkhoff, 1946 στα Ισπανικά. Εδώ έχουμε μόνο την ύπαρξη. Αυτό που φτιάχνει ο Birkhoff είναι ότι έστω $|G| = n\ \exists p\ |p| = n^2 + n$. Τι σας λέει αυτό; Ας πούμε ότι p=3. Μας λέει ότι έχουμε ένα poset, σύνολο μερικής διάταξης, 9+3=12, άρα με 12 στοιχεία το οποίο έχει σαν ομάδα αυτομορφισμού την ομάδα $\mathbb{Z}_3$. Ας πούμε ότι δεν θέλουμε να είμαστε στα poset και θέλουμε να είμαστε μόνο στα γραφήματα. Αυτό είναι απλό, γιατί θα πάρουμε τα γραφήματα του Cayley. Άρα, παίρνουμε το $\mathbb{Z}_3$ και θέλουμε να βρούμε ένα γράφημα που θέλουμε να είναι ισόμορφο ως ομάδα αυτομορφισμού με τη $\mathbb{Z}_3$. Το γράφημα θα το γράφω Gr. Άρα: $\mathbb{Z}_3 \backsimeq Aut(Gr)$. Άρα παίρνω αυτό:



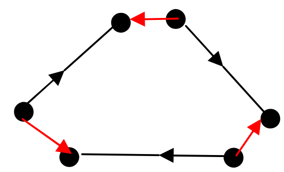
Τώρα, θα προσπαθήσω έχοντας αυτό το γράφημα να βρω όλα αυτά που μου επιτρέπουν να μετακινήσω τα στοιχεία διατηρώντας πάντοτε το ίδιο σχήμα. Βλέπουμε ότι για να έχουμε τα τρία, δεν μπορούμε να κάνουμε τίποτε άλλο από περιστροφές. Δύο περιστροφές και μία ταυτοτική. Δεν έχει καμία άλλη. Αυτό όμως είναι γράφημα. Εμείς θέλουμε αυτό το παράδειγμα να το βρούμε ως poset. Αυτό δεν είναι poset, γιατί δεν είναι μεταβατική εφόσον είναι κυκλική. Άρα, εμείς βρήκαμε για p=11 ένα poset με 22 στοιχεία. Ένα poset που έχει δύο φορές την τάξη. Αυτό που έλεγε ο Birkhoff το 1946 είναι ότι υπάρχει poset τάξης 132 που έχει αυτή την ιδιότητα. Και εμείς το 1993 αποδείξαμε ότι υπάρχει το poset και μάλιστα αποδείξαμε ότι είναι το μικρότερο. Δεν μπορούμε να πάμε πιο κάτω. Αυτός είπε ότι υπάρχει ένα poset που είναι $n^2 + n$ και εμείς είπαμε ότι το μικρότερο είναι n ή 2n ή 3n. Και το φτιάξαμε. Το κάνω με τη σύμβαση Hasse και είναι αυτό:



Το πιο εντυπωσιακό όμως ήταν να ανοίξουμε κάθε σημείο και να εισάγουμε σε κάθε σημείο μία τριπλή αλυσίδα η οποία δεν επέτρεπε να περιστρέφεσαι από την άλλη πλευρά. Θα σας δώσω ένα παράδειγμα πολύ απλό. Παίρνετε το γράφημα που είχαμε πριν και θέλετε να το κάνετε poset. Τι κάνετε; Εκεί που έχει ένα σημείο, τα κάνετε δύο. Άρα, έχετε αυτό:

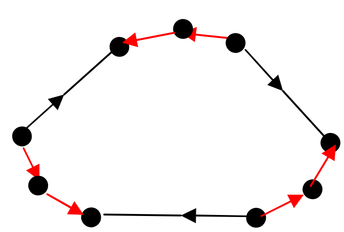


Αν βάλουμε ανάποδα τα βελάκια, αυτό θα είναι poset.



Δεν είναι ωραίο; Θα μπορούσατε να πείτε, είμαστε στο Παιδαγωγικό και τι δουλειά έχουμε να ασχοληθούμε εμείς με αυτό;

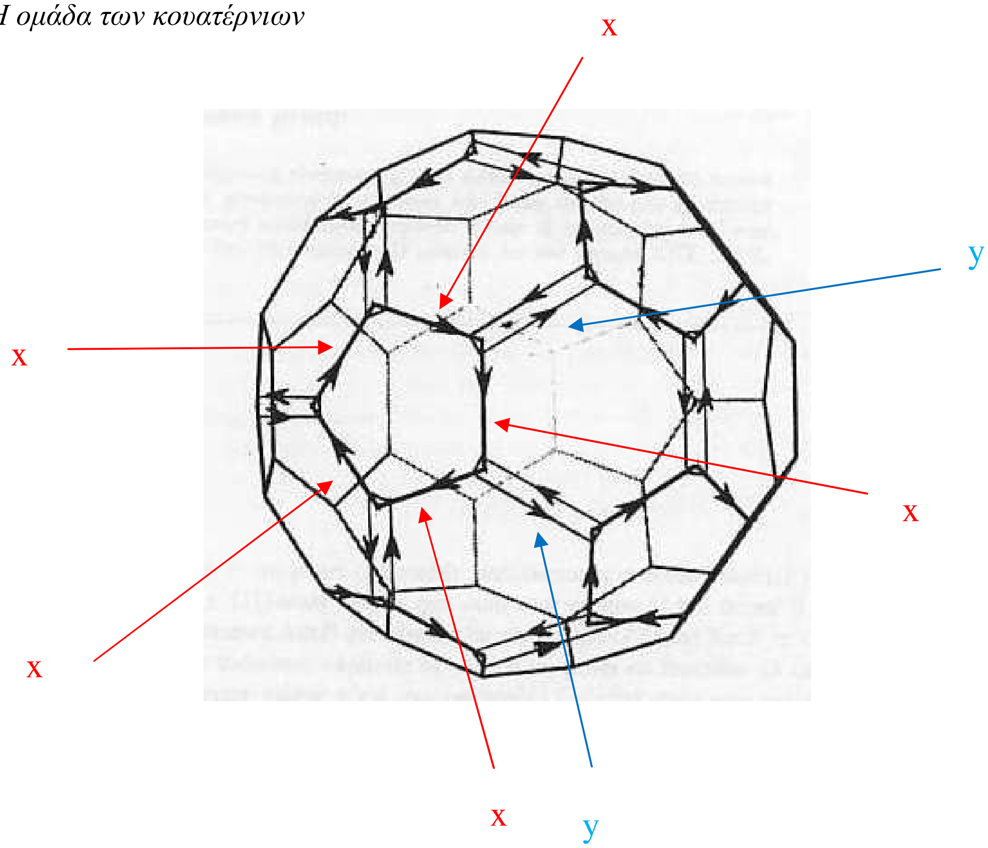
Αυτό είναι ερευνητικό αποτέλεσμα που δεν υπήρχε πριν στη θεωρία γραφημάτων και εμείς αυτό το δημοσιεύσαμε το 1996. Το θέμα είναι ότι κανένας δεν είχε σκεφτεί να το κάνει με αυτόν τον τρόπο. Αυτό στην πραγματικότητα είναι η διεδρική ομάδα πάνω στο τρίγωνο, άρα είναι τάξης 6, η οποία μοιάζει με την $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$. Το βλέπετε γιατί; Είναι γιατί έχετε 2 επίπεδα αλλά έχετε τριπλό από κάτω. Αν κουνάτε το πάνω μέρος ή το κάτω μέρος δεν αλλάζει τίποτα. Αυτό θέλει να πει ότι η ομάδα αυτομορφισμού είναι το διπλάσιο. Άρα, τι κάνουμε; Αυτή τη φορά θα φτιάξουμε το ίδιο σχήμα, αλλά αυτή τη φορά δεν θα βάλουμε ένα στοιχείο επιπλέον, αλλά και ένα ενδιάμεσο. Όπως πήγαιναν αυτοί με την ίδια κατεύθυνση, εμείς θα πηγαίνουμε ανάποδα, έτσι ώστε το μεταβατικό βελάκι να μπαίνει όπως φαίνεται στο σχήμα.



Αυτό μου επιτρέπει να κοιτάξω αυτό το πράγμα ξεχωριστά και να μπορώ να το πάω μόνο σε σημείο κόκκινο. Δεν μπορώ να το πάω αλλού. Γιατί αυτό το σημείο έχει είσοδο και έξοδο. Άρα καταφέραμε να βάλουμε μια ετικέτα πάνω σε κάθε σημείο χωρίς να μπορούμε να το μεταφέρουμε αλλού.

Το A_5 του Galois, αυτό που έλεγε ο Birkhoff έχουμε 60 στοιχεία. Τα βλέπουμε σαν την μπάλα ποδοσφαίρου. Όταν έχουμε 60 στοιχεία ο Birkhoff μάς λέει ότι μπορεί να μας κάνει ένα poset που να έχει $60^2 = 3600$ στοιχεία +60=3660 στοιχεία επαρκούν για να φτιάξω το poset αυτό. Εμείς, λοιπόν, φτιάξαμε ένα poset που είχε 180 στοιχεία. Έχουμε το πεντάγωνο και γύρω του είναι 5 εξάγωνα.

Στο πεντάγωνο είναι όλα x και 5x=1 ενώ τα άλλα είναι y. Για να το κάνουμε σαν γράφημα, το πεντάγωνο το αφήσαμε μόνο του και στην ουσία τη μία πλευρά του εξαγώνου την κάναμε ίση με x. Στην ουσία κλειδώσαμε πάνω στα σημεία και μετά είδαμε ότι με αυτό που κάναμε πατούσαμε δύο φορές. Πώς μας ήρθε αυτή η ιδέα; Από τη χημεία. Με τον τύπο του Kékulé.



Τι θέλω να σας πω. Πάνω σε αυτόν τον πίνακα, πολλά πράγματα μπορούμε να συνδέσουμε. Το όριό μας είναι απλώς η νοημοσύνη μας. Αυτό το poset δημοσιεύτηκε το 1992. Το 1992, στις 27 Ιουνίου διεξαγόταν συνέδριο στη Lyon. Εκεί θα μιλούσαμε και εμείς για αυτό το πρόγραμμα που τρέχαμε 6 μήνες αλλά ακόμα οι υπολογισμοί δεν είχαν τελειώσει. Τελικά, αντί για πρωί παρουσιάζουμε απόγευμα και οι υπολογισμοί τελειώνουν κάτι σαν 20 λεπτά πριν ξεκινήσουμε τη διάλεξη.

RECORDS IN COMBINATORICS, NUMBER THEORY AND ALGEBRA

The number of non isomorphic posets with N elements

P(0) = 1

P(1) = 1

P(2) = 2

P(3) = 5

P(4) = 16

P(5) = 63

P(6) = 318

P(7) = 2.045 (J.Wright 1972)

P(8) = 16.999 (S. K. Das 1977)

P(9) = 183.231 (R. H. Mohring 1984)

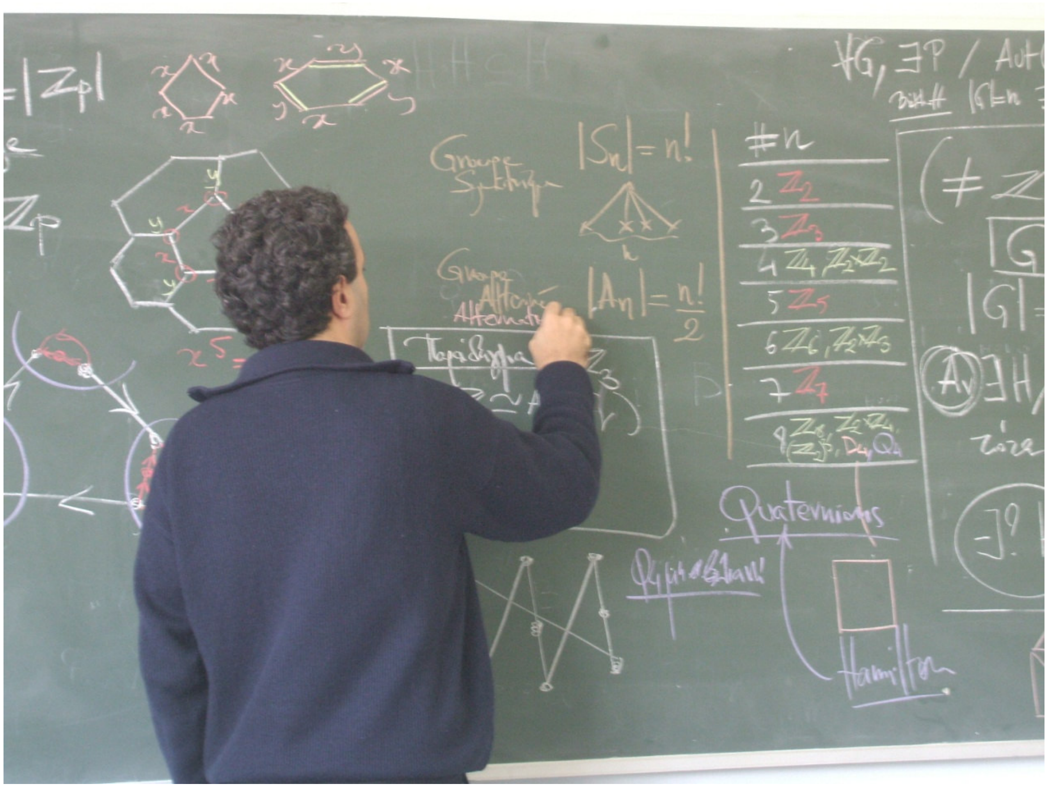
P(10) = 2.567.284 (J. C. Culberson, G. J. E. Rawlins 1990)

P(11) = 46.749.427 (J. C. Culberson, G. J. E. Rawlins 1990)

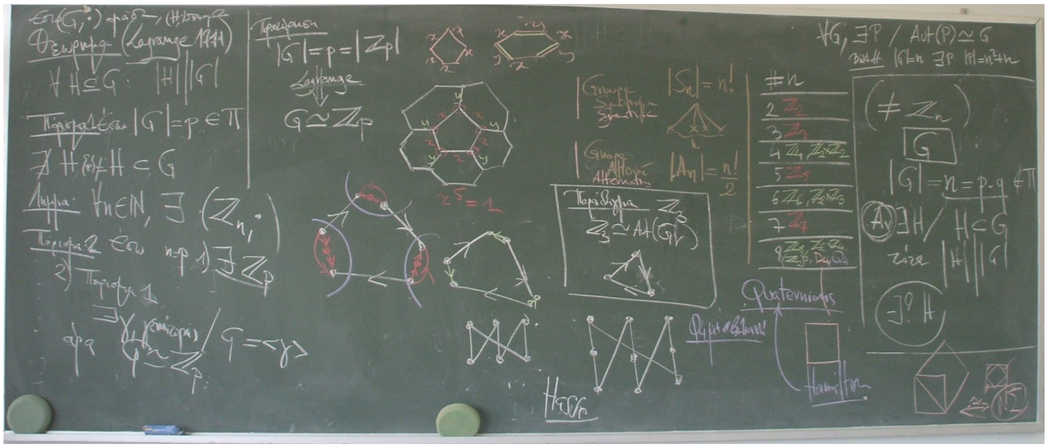
P(12) = 1.104.891.746 (C. Chaunier, N. Lygeros 1991)

P(13) = 33.823.827.452 (C. Chaunier, N. Lygeros 1992)

P(14) = 1.338.193.159.771 (N. Lygeros, P. Zimmermann 2000)


|Sn| = n!
|An| = n!/2
#n
Quaternions
Hamilton


|Sn| = n
x5 = 1



Τώρα, μετά από αυτή την εισαγωγή μπορούμε να δούμε την παρουσίαση της εργασίας.

QUATERNIONS (HAMILTON)

Τα κουατέρνια αποτελούνται από 8 σύνολα. Είναι τα εξής:

$\{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$

Με αυτά τα 8 σύμβολα ορίζουμε τις εξής πράξεις: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ *και*

Το i είναι το i που ξέρετε. Ίσως σας φαίνεται λίγο αυθαίρετο. Είναι 8 σύμβολα, αλλά είναι +, - ο καθένας. Άρα, νοητικά στην ουσία είναι ένας χώρος με τέσσερις διαστάσεις, αντί για τρεις και πηγαίνει το καθένα μπροστά και πίσω. Έτσι εξηγείται και το + και -. Σε αυτόν το χώρο, για να μπορούμε να έχουμε όμοια πράγματα, άμα σβήσουμε τα j και τα k θα πέσουμε στους μιγαδικούς. Δεν έχουμε ενδιάμεσο. Δεν μπορούμε να πάμε στο R_3. Πάμε κατ' ευθείαν στο R_4. Τα οκτώνια θα είναι στο R_8. Εδώ έχουμε 4 στοιχεία, άρα 4 διαστάσεις, γι' αυτό και $\mathbb{Q}_4$, γι' αυτό και quaternions. Αν έχεις το $\mathbb{R}$ που είναι οι πραγματικοί, δηλαδή το 1 και το -1, μετά βάζεις σε αυτούς και του μιγαδικούς, το i και το –i στις τρεις διαστάσεις και κάτι το ανάλογο στις τέσσερις. Όλοι αυτοί που είναι φανταστικοί πρέπει να έχουνε κάτι το ανάλογο να είναι -1. Δηλαδή, βλέπετε να είναι μια γενίκευση καθαρά από τους μιγαδικούς. Άρα, εδώ είναι σαν να είμαστε στο $\mathbb{C}^2$ και όχι μόνο στο $\mathbb{R}^4$. Άρα, τα j και τα k είναι και αυτά μιγαδικοί. Και το έχετε και στην απόδειξη αυτό. Είναι όπως είναι και στη μερική σχετικότητα. Η υπογραφή είναι + + + - , δηλαδή x, y, z ο χώρος θετικοί και – ο χρόνος. Και μπορείς να τα πάρεις και ανάποδα και να γράψεις ότι η ύλη είναι πάντοτε μέσα στο χρόνο, άρα να γράψεις ότι ο χρόνος είναι το +. Αυτός είναι χώρος του Minkowski, δεν θα είναι ευκλείδειος. Εδώ έχουμε κάτι που αντιπροσωπεύει ένα χώρο με τέσσερις διαστάσεις, δεν το γράφουμε όμως εδώ αλλά κοιτάζουμε μόνο πώς μπορούμε να τον φτιάξουμε μέσω της θεωρίας ομάδων, αλλά ακόμα και αν δεν τα βλέπουμε, πρέπει να τα συνδέουμε γιατί τίποτα δεν είναι αυθαίρετο ή αυτονόητο. Μιλάμε για μαθηματικά 19ου αιώνα. Πριν δεν υπήρχαν. Ολόκληρος χώρος τεσσάρων διαστάσεων δεν είχε επινοηθεί. Άρα, αυτά εδώ είναι πολύ καλά δομημένα και θα σου παράγουν έναν πίνακα που όλα στέκουν.

Εκτός από την παραπάνω πράξη υπάρχουν και αυτές:

$i \cdot j = k$ *και*

$k \cdot i = j,\ j \cdot k = i$

Καταλαβαίνετε γιατί ισχύουν αυτές οι πράξεις; Εξωτερικό γινόμενο. Και αν ήσασταν και πιο εγκεφαλικοί θα σκεφτόσασταν ότι αυτό μας βάζει σε υποψίες για μη αντιμεταθετική ιδιότητα, αφού το εξωτερικό γινόμενο δεν είναι αντιμεταθετικό. Άρα, υπάρχει ένα ωραίο άρθρο στα γαλλικά όπου εξηγώ τη μη αντιμεταθετικότητα των κουατέρνιων μέσω της μη συμμετρίας του εξωτερικού γινομένου.

Άρα, έχουμε μία βάση τριών διαστάσεων i, j, k όλα τα διανύσματα των οποίων είναι ορθογώνια μεταξύ τους. Να θυμάστε είναι ο κανόνας με τα τρία δάκτυλα. Κάθε φορά που παίρνεις τα δύο σου κάνουν το τρίτο. Κι αν τα πάρεις ανάποδα, σου κάνουν το -. Είναι εξωτερικό γινόμενο. Δεν είναι μαθηματικά εξωγήινων!

Τώρα θα κατασκευάσουμε τον πίνακα πολλαπλασιασμού.

	1	**-1**	**i**	**-i**	**j**	**-j**	**k**	**-k**
1	1	-1	i	-i	j	-j	k	-k
-1	-1	1	-i	i	-j	j	-k	k
i	i	-i	-1	1	k	-k	-j	j
-i	-i	i	1	-1	-k	k	j	-j

j	j	-j	-k	k	-1	1	i	-i
-j	-j	j	k	-k	1	-1	-i	i
k	k	-k	j	-j	-i	i	-1	1
-k	-k	k	-j	j	i	-i	1	-1

Για μένα αυτό το μάθημα δεν είναι μάθημα, αλλά ένας φόρος τιμής στον Hamilton. Θυμάστε ότι ήταν πάρα πολύ καλός στις γλώσσες και μετά ασχολήθηκε με τα μαθηματικά. Δηλαδή, αυτός ο πίνακας είναι έργο τέχνης. Επάνω, μας έχει βάλει τις μπογιές, τα 8, οι πράξεις που έκανε πριν είναι τα πινέλα και εδώ είναι ο πίνακας.

Μην ξεχνάτε για τη συμπλήρωση του πίνακα, θα πρέπει κάθε στοιχείο να υπάρχει μία φορά σε κάθε στήλη και σε κάθε γραμμή. Αυτό που θα ήθελα να παρατηρήσουμε, είναι ότι ενώ έχουμε κάνει συμμετρίες στην αρχή, ο πίνακας δεν είναι συμμετρικός ως προς τη διαγώνιο. Αφού δεν είναι συμμετρικός, μήπως είναι αντι-συμμετρικός; Δεν μπορεί να είναι ούτε τέτοιος γιατί θα έπρεπε να ακυρώνονται. Αυτό που έχει ενδιαφέρον τώρα είναι όταν τα παίρνετε σε μικρά κομμάτια.

	1	**-1**	**i**	**-i**	**j**	**-j**	**k**	**-k**
1	1	-1	i	-i	j	-j	k	-k
-1	-1	1	-i	i	-j	j	-k	k
i	i	-i	-1	1	k	-k	-j	j
-i	-i	i	1	-1	-k	k	j	-j
j	j	-j	-k	k	-1	1	i	-i
-j	-j	j	k	-k	1	-1	-i	i
k	k	-k	j	-j	-i	i	-1	1
-k	-k	k	-j	j	i	-i	1	-1

Ποιος είναι αυτός; Μα δεν μπορεί να είναι κανένας άλλος από τον S_2 αφού είναι ο μοναδικός που υπάρχει τάξης 2. Αυτό που μπορούμε να προσθέσουμε είναι ότι αν τα παίρναμε έτσι στα τετραγωνάκια, θα βλέπατε καλύτερα τι γινόταν όταν τον κατασκευάζαμε. Και θα προσέξετε ότι είναι σαν να είναι κάθε φορά το S_2. Δηλαδή, έχουμε μία δράση της S_2 στο χώρο. Αν βγάλω τις ετικέτες, βλέπουμε το ίδιο φαινόμενο. Τώρα, θα με ρωτήσετε από πού βγαίνει. Θα το κάνουμε σε γενικό πλαίσιο.

	i	j
i	$i^2=1$	k
j	-k	$j^2=1$

Αυτό βοηθά να δείτε μία δομή μέσα σε μία άλλη δομή. Βλέπετε ότι στην αρχή ενώ υπήρχε μία δυσκολία να κατανοήσουμε τι μπαίνει πού, τώρα όλα εξηγούνται σιγά-σιγά. Αν παρατηρήσετε καλά, το τετραγωνάκι που έκανα τελευταία δεν το βρίσκουμε έτσι ακριβώς μέσα στον πίνακά μας. Ναι, αλλά ίσως το μισό μέρος να είναι σε ένα χρώμα και το άλλο μισό στο διπλανό. Μη σας παραπλανούν τα χρώματα. Επιπλέον, το τετραγωνάκι που σας έφτιαξα δεν μπορεί παρά να βρίσκεται στη διαγώνια εφόσον υπάρχουν τα στοιχεία στο τετράγωνο. Αν θέλουμε να είμαστε πιο σοβαροί, για να αναφερθούμε σε γενικό βαθμό, στο τετραγωνάκι δεν θα έπρεπε να βάλουμε κάτι μέσα από τον πίνακα, αλλά άλλα στοιχεία, όπως α και β. Άρα, βλέπετε ότι έχουμε επανάληψη κάθετα, επανάληψη οριζόντια, επανάληψη στις τετράδες και το αποτέλεσμα από όλο αυτό είναι ότι δεν είναι συμμετρικό. Αν το σκεφτείτε καλά, είναι απίστευτα συμμετρική αυτή η ομάδα, για να μην είναι αντιμεταθετική. Κι αν προσέξετε κάτι ακόμα, θα δείτε πώς «παίζουν» τα τετραγωνάκια όταν είναι συμμετρικά σε σχέση με τη διαγώνιο. Θα δείτε ότι δεν είναι τα ίδια, αλλά είναι ακριβώς τα αντίθετα. Δηλαδή, ανακαλύπτουμε μία άλλη συμμετρία εκεί πέρα (τα πράσινα τετράγωνα είναι συμμετρικά, ενώ τα κόκκινα αντισυμμετρικά).

	1	**-1**	**i**	**-i**	**j**	**-j**	**k**	**-k**
1	1	-1	i	-i	j	-j	k	-k
-1	-1	1	-i	i	-j	j	-k	k
i	i	-i	-1	1	k	-k	-j	j
-i	-i	i	1	-1	-k	k	j	-j
j	j	-j	-k	k	-1	1	i	-i
-j	-j	j	k	-k	1	-1	-i	i
k	k	-k	j	-j	-i	i	-1	1
-k	-k	k	-j	j	i	-i	1	-1

Για να βρει τα κουατέρνια κανείς... Ήταν καλό που ήξερε πολλές γλώσσες. Να μπορεί να χειριστεί πολλές γλώσσες, να μπορεί να δημιουργήσει μια νέα γλώσσα, με τον τρόπο των μιγαδικών για να μπορεί να βρει κάτι που κανείς δεν έχει σκεφτεί.

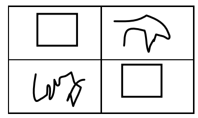
Τώρα, παίρνουμε την υποομάδα H={1, -1, i, -i}.

Είναι τάξης 4 άρα διαιρεί την ομάδα. Επιπλέον, είναι η υποομάδα που αντιπροσωπεύει τους μιγαδικούς μέσα στη μεγάλη ομάδα των κουατέρνιων.

Είχαμε δει ότι αριστερό συνσύνολο (coset) είναι $x \cdot H = \{xh/h \in H\}$ *για* $x \in G$*.*

Τα αριστερά συνσύνολα ταυτίζονται με τα δεξιά συνσύνολα. Αυτό θα έπρεπε να ισχύει αν για την υποομάδα ίσχυε η αντιμεταθετική ιδιότητα.

Προηγουμένως είπαμε ότι τα κουατέρνια είναι η πιο μικρή ομάδα που είναι μη αβελιανή. Κατά συνέπεια, εφόσον έχει πάρει μία υποομάδα με τέσσερα στοιχεία αναγκαστικά είναι αντιμεταθετική. Σας ξαφνιάζει που η ομάδα δεν είναι ενώ η υποομάδα είναι αντιμεταθετική; Γιατί; Μπορείς να μην έχεις μια συμμετρία σε ένα ολικό επίπεδο, αλλά μπορείς να έχει συμμετρία σε ένα τοπικό.



Δηλαδή, αν έχουμε κάτι τέτοιο δεν είναι συμμετρικό ολικά. Αλλά, τοπικά υπάρχει η συμμετρία στα τετράγωνα. Αυτό που ξεχνάτε είναι ότι αν έχετε μια αβελιανή ομάδα, η υποομάδα θα είναι αβελιανή. Αν όμως δεν είναι αβελιανή η ομάδα, μπορείς να έχεις αβελιανή υποομάδα. Άρα, δεν θα πρέπει να σας ενοχλεί καθόλου αυτό το σχήμα. Τα γυαλιά σας. Είναι συμμετρικά αν πάρουμε ως άξονα τη μύτη. Αλλά μέσα στον ίδιο φακό, δεν είναι συμμετρικά. Γιατί, αν πάρεις το φακό, τον κόψεις στη μέση και βλέπεις ότι δεν είναι. γιατί δεν είναι κύκλος τα γυαλιά σας, αλλά κοντά στη μύτη έχουν ένα σπάσιμο. Στην καθημερινότητά μας υπάρχουν πολύ χειρότερα παραδείγματα που δεν σας ξαφνιάζουν καθόλου. Άρα, στην πραγματικότητα, οι ομάδες είναι σχεδόν πιο εύκολες από την καθημερινότητά μας, χωρίς όμως ποτέ να έχουμε δει πόσο μη συμμετρικά είναι κάποια πράγματα.

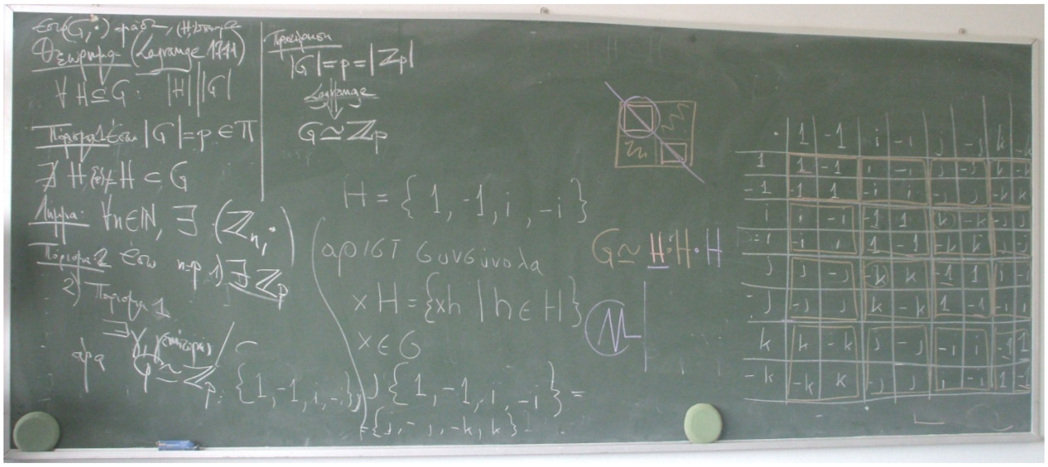
Για x=j, το αριστερό συνσύνολο της υποομάδας Η είναι

$j \cdot \{1, -1, i, -i\} = \{j, -j, i, -i\}$

Το δεξί συνσύνολο είναι

$\{1, -1, i, -i\} \cdot j$

Και αυτά τα δύο ταυτίζονται.



Κλείνουμε αυτόν τον κύκλο και περνάμε σε κάτι τελευταίο.

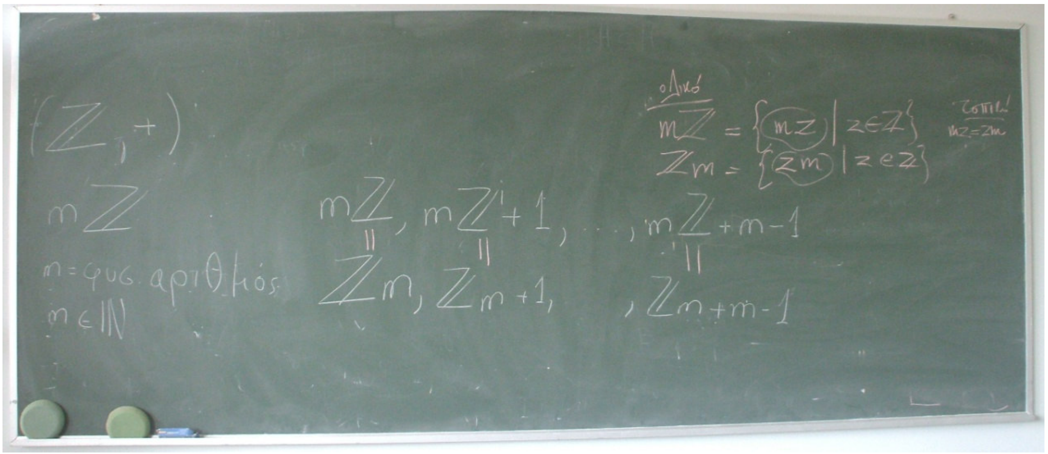
Έχουμε μία ομάδα $(\mathbb{Z}, +)$*. Αυτή είναι εντελώς διαφορετική από την προηγούμενη γιατί αυτή είναι άπειρη. Παίρνουμε μία υποομάδα* $m \in \mathbb{N}$.

Τα αριστερά και τα δεξιά συνσύνολα ως προς οποιαδήποτε ομάδα ταυτίζονται. Αυτό μπορούμε να το γράψουμε με άλλα λόγια:

$m\mathbb{Z}, m\mathbb{Z}+1, \dots, m\mathbb{Z}+m-1 \qquad m\mathbb{Z} = \{mz/z \in \mathbb{Z}\}$

$\mathbb{Z}m, \mathbb{Z}m+1, \dots, \mathbb{Z}m-1 \qquad \mathbb{Z}m = \{zm/z \in \mathbb{Z}\}$

Τι είναι το mz; Δεν είπες ότι είναι ο zm; Μήπως θα ήταν καλό να μας το έλεγες από την αρχή; Αυτή είναι η ιδέα. Επανέρχεστε στον ορισμό ο οποίος σας δίνει κάτι σημαντικό. Άρα, έχουμε τα τοπικά που είναι ίσα, άρα τα ολικά είναι ίσα και αυτά. Εδώ, θέλει να μας πει ότι όλα τα τοπικά είναι ίσα, άρα και το ολικό θα είναι το ίδιο. Όταν όμως είμαστε από την αβελιανή πλευρά. Γιατί υπάρχει ένα πολύ καλό αντιπαράδειγμα. Η σφαίρα και το επίπεδο. Τοπικά η σφαίρα είναι το ίδιο με το επίπεδο, για οποιοδήποτε τοπικό. Αν το δεις όμως με ολική προσέγγιση δεν είναι.



http://www.lygeros.org/0062-Construction_de_posets_dont_le_groupe_d_automorphismes_est_isomorphe_a_un_groupe_donne.htm

http://www.lygeros.org/0449-De_l_anti-symetrie_au_centre_du_corps_des_quaternions.htm