Δικτυωτά διαγράμματα και ομάδες αυτομορφισμών

Ν. Λυγερός

Παρουσίαση εργασίας φοιτητή

Θα μιλήσουμε για το θεώρημα του Lagrange. Αλλά προτού φτάσουμε εκεί, θα ήθελα να εισάγω ορισμένες έννοιες που θα μας βοηθήσουν. Ας ξεκινήσουμε από την έννοια της G-δράσης επί ενός τυχαίου συνόλου A.

(G, ·) σύνολο A (από αριστερά)

Θα ορίσουμε μία απεικόνιση

$(x,a) \rightarrow x \cdot a \ \forall x \in G$ και $\forall a \in A$

η οποία πρέπει να πληροί δύο προϋποθέσεις:

1) $(xy)a=x(ya) \ \forall x,y \in G$ και $\forall a \in A$
2) $e \cdot a=a$ (ουδέτερο στοιχείο)

Βλέπουμε ότι το πρώτο είναι μια μορφή προσεταιριστικότητας. Το $x \cdot y \in G$, άρα δρα το a δεξιά. Δρα επίσης δεξιά στο y. Οπότε αυτό μας λέει ότι όταν έχουμε πράξη με το a, παραμένουμε στο χώρο του a. Στην πραγματικότητα, αυτό το πρώτο κριτήριο είναι το πολύ δύσκολο. Το δεύτερο μάς λέει ότι το ουδέτερο στοιχείο είναι ουδέτερο και για το a. Αυτό φαίνεται αυτονόητο, αλλά προσέξτε ότι εδώ μας λέει ότι για τη συγκεκριμένη πράξη, το ουδέτερο έχει την ιδιότητά του ακόμη και αν αλλάξουμε χώρο. Εφόσον τηρούνται αυτές οι δύο προϋποθέσεις, τότε θα λέμε ότι η G δρα ή ενεργεί επί του συνόλου A και έχουμε μία G-δράση επί του A, αριστερή, δηλαδή ότι όλα τα στοιχεία που ανήκουν στο G είναι πάντοτε αριστερά από αυτά που ανήκουν στο A. Το ίδιο πράγμα, όπως θα δούμε τώρα, μπορεί να γίνει και από τα δεξιά. Κάθε στοιχείο $x \in G$ ορίζει μια απεικόνιση.

$T_x : A \longrightarrow A : a \longrightarrow T_x(a) = xa$

$T_{xy} = T_x T_y$, $T_e = I$ (ταυτοτικός πίνακας)

Αυτό το γράφουμε για να δούμε πώς γίνεται η σύνθεση συναρτήσεων. Στα μαθηματικά σε άλλο επίπεδο θα μπορούσαμε να κάνουμε σύνθεση απεικονίσεων.

Στη G δράση από δεξιά έχουμε:

$(x.a) \rightarrow ax$

1) $a(xy)=(ax)y$

2) $ae=a$

Εδώ η απεικόνιση είναι:

$S_x(a)=ax$, $S_{xy}=S_y S_x$

Για να καταλάβουμε γιατί στη σύνθεση βγαίνει ανάποδα, ίσως πρέπει να κάνουμε ένα παράδειγμα.

$S_y(a)=ay \qquad S_x(a)=ax$

$S_y(S_x(a))= a(ax)$

Δηλαδή όταν έχουμε ax, είμαστε στο χώρο του a. Για παράδειγμα, αν πάρω τους πραγματικούς και μία άγνωστη ομάδα που δρα πάνω τους, μένω στους πραγματικούς. Αν έχω π.χ. την πράξη της πρόσθεσης, θα μείνω εκεί, δεν μπορώ να αλλάξω χώρο. Αλλά έχω και ομάδα. Έχω αντίστροφο, αν κάνω για παράδειγμα (–α) + α = 0. Η ιδέα είναι ότι δεν επανερχόμαστε στο χώρο, είμαστε στο χώρο. Δηλαδή αν κάνουμε μία μετάθεση στο επίπεδο, δεν θα πούμε πως επανερχόμαστε στο επίπεδο, αφού είμαστε ήδη στο επίπεδο και παραμένουμε εκεί.

(σελ.21) Στη μελέτη μας δεν υπάρχει διαφορά μεταξύ αριστερών και δεξιών G-δράσεων διότι μια αριστερή G-δράση γίνεται δεξιά αν γράψουμε $ax=x^{-1}a$. Τότε:

$S_{xy}(a)=(xy)^{-1}a=y^{-1}(x^{-1}a)=y^{-1} S_x(a)= S_y(S_x(a))= S_y S_x(a)$

Για να το δούμε αυτό πρώτα με κάτι ήδη γνωστό. Αν έχω μία ομάδα με ένα στοιχείο που είναι ουδέτερο μόνο αριστερά:

(G, ·) ομάδα

Έστω $\varepsilon \in G$: εx=x (1)

Το ερώτημά μας είναι, αυτό είναι το ουδέτερο στοιχείο ή είναι κάτι άλλο; Αν είναι αντιμεταθετική είναι trivial. Όταν δεν είναι αντιμεταθετική, αν μπορούμε να πούμε πως το στοιχείο που είναι ουδέτερο από αριστερά, είναι το ουδέτερο στοιχείο; Γιατί σε μία μη αντιμεταθετική ομάδα, το ουδέτερο είναι αντιμεταθετικό. Λέμε:

$\varepsilon \neq e$, e: xe=ex=x (δηλ. e το ουδέτερο στοιχείο) (2)

(1): $\underline{\varepsilon e = e}$

(2): $\underline{\varepsilon e} = e\varepsilon = \underline{\varepsilon}$

Από (1),(2) ε=e

Αυτό που βλέπουμε είναι ότι όταν είσαι σε μία ομάδα και είσαι ουδέτερος αριστερά ή δεξιά, τότε θα είσαι ουδέτερος δεξιά ή αριστερά και παρεμπιπτόντως θα είσαι ουδέτερος. Αυτό μπορούμε να το γενικεύσουμε και στις υπερομάδες, είναι ένα θεώρημα από μία Ρουμάνα. Εδώ είναι ας πούμε μία άσκηση, το άλλο είναι μια δημοσίευση.

Τώρα για να γυρίσουμε στο πιο πάνω, ας πούμε πως πολλαπλασιάζουμε με x και από τις δύο πλευρές. Τότε θα έχουμε:

$xax=a$ επειδή όπως είδαμε ισχύει $ax=x^{-1}a$, άρα $x(ax)=x(x^{-1}a)=(xx^{-1})a=a$

Εδώ δεν θα πρέπει να σας προβληματίζει η ισοδυναμία εφόσον το x μπορώ να το εκφράσω ως το x κάποιου ή το x^{-1} κάποιου, δηλαδή τον αντίστροφο κάποιου, εφόσον είμαστε σε ομάδα και άρα υπάρχει ο αντίστροφος.

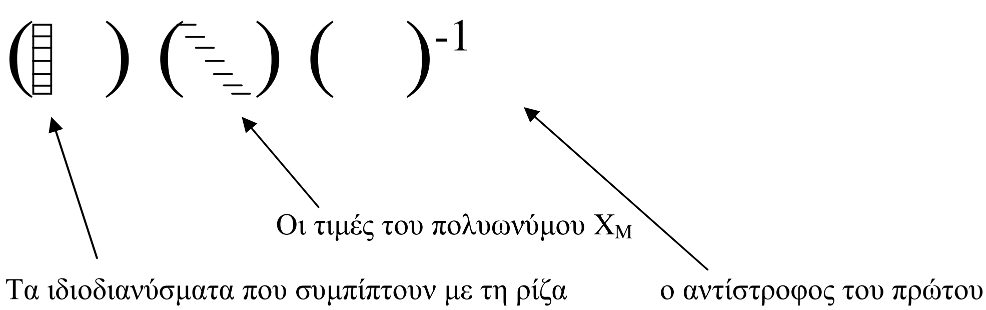
Αυτό είναι όπως όταν κάνουμε διαγωνοποίηση πινάκων. Εκεί, παίρνω έναν πίνακα, κοιτάζω τις ιδιοτιμές, κοιτάζω τα ιδιοδιανύσματα και μπορώ να μετατρέψω τον πίνακά μου σε: πίνακα αλλαγής x διαγώνιο πίνακα x αντίστροφο πίνακα αλλαγής:

$$M=P\Delta P^{-1}$$

Θα πούμε ότι η M είναι διαγωνοποιήσιμη αν οι ιδιοτιμές είναι οι τιμές του χαρακτηριστικού πολυωνύμου. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι το

$$X_M=\det(M - xId)$$

Όταν το αναπτύσσεις αυτό, σου δίνει ένα πολυώνυμο. Οι ρίζες από αυτό το πολυώνυμο είναι οι ιδιοτιμές. Υπάρχει ένα θεώρημα που σου λέει ότι αν η πολλαπλότητα των τιμών είναι το ίδιο με τη διάσταση των υποδιαστημάτων του συστήματος, τότε είναι η διαγωνοποίησή του. Δηλαδή είναι αυτό που γράψαμε παραπάνω, $P\Delta P^{-1}$. Τώρα, πώς έχουν φτιαχτεί αυτοί οι πίνακες.



Αν θέλετε, για να το καταλάβουμε με μία εκφυλισμένη περίπτωση, πέστε ότι ο M είναι ένας διαγώνιος πίνακας.

$D=\begin{pmatrix} a & 0 \\ o & b \end{pmatrix}$ τώρα κάνω την ορίζουσα από τον $(D - xId)$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ o & b \end{pmatrix} - x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ o & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ o & b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 0 \\ o & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-x & 0 \\ o & b-x \end{pmatrix}$$

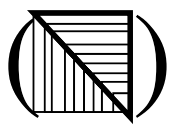
και έχω:

$$X_D=(a-x)(b-x)$$

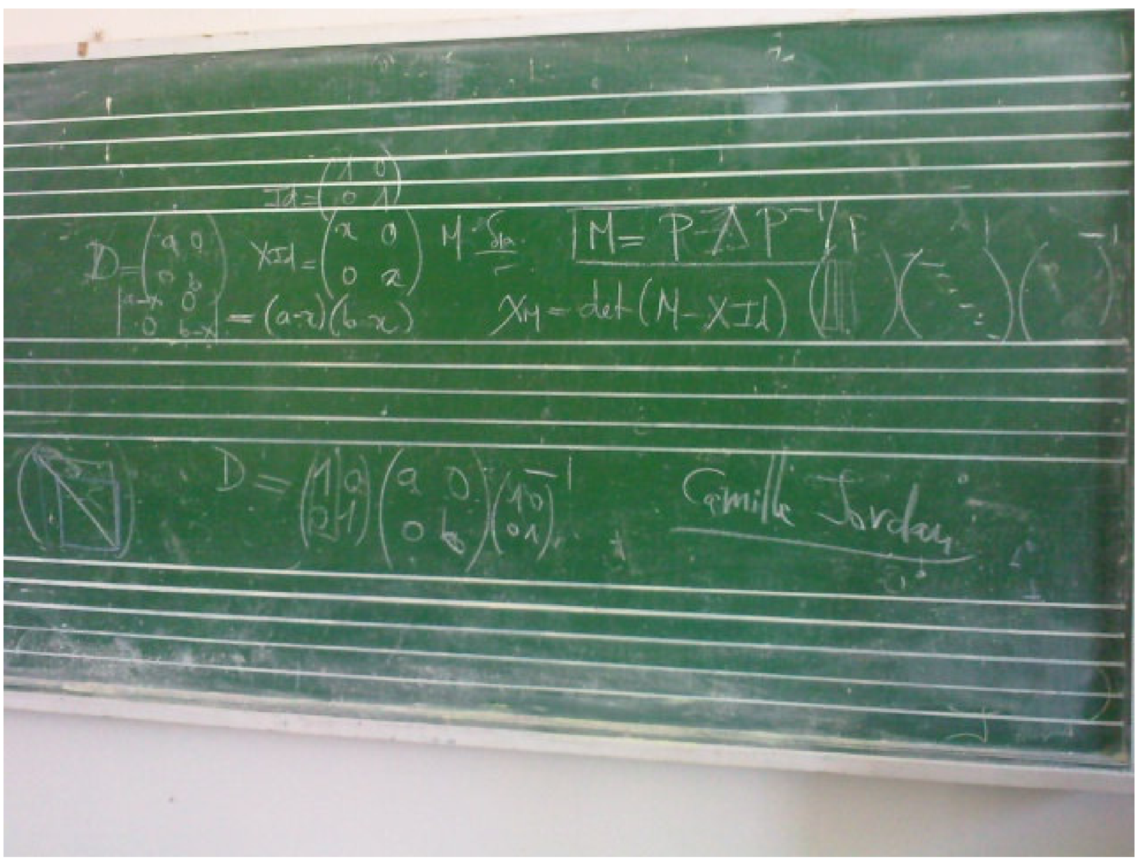
Οπότε:

$$D=\begin{pmatrix}1 & 0\\ o & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & 0\\ o & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ o & 1\end{pmatrix}^{-1}$$

Βέβαια, αυτό είναι εκφυλισμένο. Υπάρχουν πίνακες που μπορούν να διαγωνοποιηθούν και υπάρχουν πίνακες που μπορούν να τριγωνοποιηθούν. Είναι ο φορμαλισμός του Camille Jordan. Η μέθοδος του Jordan σάς λέει ότι μπορείτε να κάνετε το ίδιο με τους πίνακες που δεν μπορείτε να διαγωνοποιήσετε, αλλά μπορείτε να τριγωνοποιήσετε. Οπότε επάνω, αυτό που πρέπει να κάνουμε είναι να βρούμε την ορίζουσα, να κάνουμε το ανάπτυγμά της και όλα τα άλλα ξέρουμε ότι είναι μηδέν. Όταν έχω έναν πίνακα ο οποίος είναι τριγωνικός πάνω ή τριγωνικός κάτω, η ορίζουσά του είναι ο πολλαπλασιασμός από τα στοιχεία που βρίσκονται στη διαγώνιό του.



)



Επιστρέφοντας στο x και τον αντίστροφό του, μπορούμε να δούμε -για να το καταλάβουμε- το παράδειγμα του ρολογιού. Όταν η ώρα είναι στο 6, μπορούμε να πούμε ότι είναι το +2 του 4 ή το -2 του 8. Τώρα μπορούμε να ξαναδούμε γιατί ισχύει αυτό που γράψαμε παραπάνω για τις αριστερές και τις δεξιές G-δράσεις:

$$S_{xy}(a)=\underbrace{(xy)^{-1}a=y^{-1}(x^{-1}a)}_{\text{ιδιότητα}}=y^{-1}\,S_x(a)=S_y(S_x(a))=S_y\,S_x(a)$$

Για να το καταλάβουμε καλύτερα, ας δούμε πώς θα το γράφαμε εάν θέλαμε να το αποδείξουμε:

$$(xy)\,y^{-1}(x^{-1}a)=x(yy^{-1})x^{-1}a=xx^{-1}a=a$$

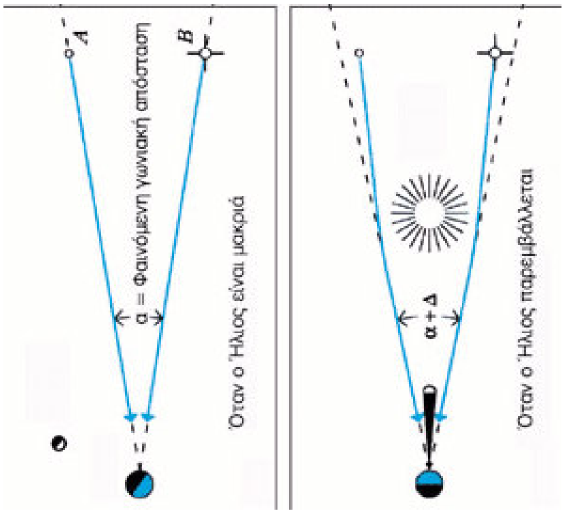
Οπότε το πρώτο = είναι καθαρά εφαρμογή του ορισμού ($ax=x^{-1}a$).

Το δεύτερο το δείξαμε τώρα, είναι μια ιδιότητα και τα υπόλοιπα είναι πάλι εφαρμογή του ορισμού. Στην πραγματικότητα, όλα αυτά τα κάνουμε επειδή δεν μπορούμε να προϋποθέσουμε ότι είναι αντιμεταθετική. Αλλιώς είναι αυτονόητο. Αλλά η θεωρία ομάδων διαχειρίζεται και οντότητες που δεν είναι αντιμεταθετικές, άρα πρέπει να είμαστε προσεχτικοί. Εδώ αυτό που προσπαθούμε να δείξουμε είναι ότι ακόμη κι αν η ομάδα η ίδια δεν είναι αντιμεταθετική, η δράση της ομάδας είναι αντιμεταθετική. Βέβαια η ιδιότητα αυτή εμφανίζεται στη σύνθεση, οπότε στην πραγματικότητα έχουμε αλλάξει πράξη. Αυτό που πρέπει να προσέξουμε είναι ότι μόνο στη δεύτερη ισότητα είχαμε να εφαρμόσουμε μία ιδιότητα. Τα υπόλοιπα ήταν απλώς ο ορισμός, έπρεπε να το γράψουμε κάπως και ο ορισμός μάς λέει πώς να το γράψουμε. Όλη η πολυπλοκότητα βρίσκεται στη δεύτερη ισότητα. Αν θέλουμε να το πούμε κάπως αλλιώς, θα λέγαμε ότι αυτό εδώ είναι ο γνωστικός πυρήνας. Εάν όλη η σειρά είναι ο προβληματισμός σου, θα σου έλεγα ότι η πολυπλοκότητα του προβληματισμού σου, είναι η πολυπλοκότητα του πυρήνα.

πολ (πρ) = πολ (πυρ)

Εδώ δεν πρέπει να μπερδεύεστε με τους συμβολισμούς, γιατί τότε θα κολλήσετε στην τεχνική, ενώ υπάρχει τέχνη. Η τέχνη είναι η επιστήμη που καταφέρνει και κρύβει την τεχνική. Όλα αυτά που κάνουμε τώρα είναι μία νοητική άσκηση. Είναι μία έκφραση που χρησιμοποιούσε συχνά ο Einstein και έλεγε ότι για να βρεις ένα πείραμα, πρώτα πρέπει να κάνεις μία άσκηση σκέψης, για να βρεις τι θα μπορούσες να μετρήσεις. Ένα παράδειγμα είναι ότι όταν σου λέει πως η βαρύτητα τροποποιεί την τροχιά του φωτός, δεν είναι ένα πείραμα που κάνει πριν. Ας πούμε το να μετρήσουμε ότι το περιήλιο του Ερμή είναι 43´´ του τόξου σε σχέση με το νευτωνικό, δηλαδή ότι δεν έκλεινε ακριβώς εκεί που θα έπρεπε με βάση τη νευτώνια μηχανική, αυτό υπήρχε αλλά δεν μπορούσαν να το εξηγήσουν. Ενώ με τη θεωρία της σχετικότητας, μπόρεσαν. Το άλλο όμως, είναι κάτι που πριν δεν το έκαναν ποτέ. Ας πούμε το παράδειγμα με την έκλειψη:

Σου λέει ότι αν βάλεις μια μεγάλη μάζα κοντά στην τροχιά του φωτός, τότε αυτή καμπυλώνεται και τελικά το αντικείμενο φαίνεται να έχει μετακινηθεί. Βέβαια η μάζα πρέπει να είναι αρκετά μεγάλη, όπως ας πούμε ο Ήλιος. Ωστόσο, με τόσο λαμπρό φως που έχει, δεν μπορεί να φανεί η καμπύλωση του φωτός από ένα αστέρι που βρίσκεται σχεδόν πίσω του. Οπότε αυτό που έκανε ο Eddington ήταν να φωτογραφήσει το αστέρι την ώρα της έκλειψης και κοίταξε τον ουρανό από πίσω, χωρίς τον Ήλιο, και είδε ότι τα αστεράκια που είναι πολύ κοντά, μετακινούνται. Αυτό είναι το πείραμα του 1919.



Βέβαια τώρα ξέρουμε ότι με τις μετρήσεις που μπορούσε να κάνει, δεν μπορούσε να το αποδείξει με τίποτα… Όπως και ο Galileo με τα δικά του.

Για να προχωρήσουμε στις ειδικές περιπτώσεις G-δράσεων. Ορισμός 1.3.2 (σελ. 22):

Έστω (G, ·) μία ομάδα και $x \in G$, τότε ονομάζεται:

αριστερός πολλαπλασιασμός επί x, η απεικόνιση $L_x: g \longrightarrow xg$,

δεξιός πολλαπλασιασμός επί x, η απεικόνιση $R_x: g \longrightarrow gx$

συζυγία του x η απεικόνιση $\sigma_x: g \longrightarrow \sigma_x(g)=xgx^{-1}$

η συζυγία ονομάζεται και **εσωτερικός αυτομορφισμός**.

Τώρα πηγαίνοντας προς το θεώρημα του Lagrange, βλέπουμε τον ορισμό 1.3.3:

Έστω H μία υποομάδα της (G, ·) , τότε κάθε σύνολο της μορφής

$xH = \{xh | h \in H\}$ όπου $x \in G$

Ονομάζεται **αριστερό συνσύνολο (coset)** με αντιπρόσωπο το x. Όμοια ονομάζεται **δεξιό συνσύνολο** κάθε σύνολο της μορφής

$Hx = \{hx | h \in H\}$

Οπότε τώρα μπορούμε να περάσουμε στο θεώρημα Lagrange (1771):

Η τάξη μιας πεπερασμένης ομάδας διαιρείται με την τάξη κάθε υποομάδας της.

$\forall H \subseteq G$: $|H| \mid |G| < \infty$

Από εδώ προκύπτει το πόρισμα 1.3.5 που μας λέει ότι «Αν η τάξη μιας ομάδας είναι πρώτος αριθμός τότε δεν έχει καμιά κύρια υποομάδα»:

$|G| = p \Longrightarrow \nexists H \subset G$

Αυτό συμβαίνει επειδή, όπως ξέρουμε για οποιοδήποτε n, υπάρχει πάντοτε μία κυκλική ομάδα $\mathbb{Z}_n$. Το ότι δεν υπάρχει υποομάδα, στις ομάδες τάξης p, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένας γεννήτορας που παράγει όλη την ομάδα. Δηλαδή λέμε ότι ξέρουμε ότι υπάρχει και ότι δεν έχει καμία υποομάδα. Αλλά έχει τουλάχιστον ένα στοιχείο μέσα. Άρα παίρνω αυτό το στοιχείο και του κάνω την πράξη με τον εαυτό του. Θα πιάσει όλη την ομάδα, γιατί αν έπιανε κάτι άλλο, θα ήταν υποομάδα, θα είχα μια μικρή τροχιά, θα ξαναερχόταν στον εαυτό του. Εφόσον όμως θα πρέπει να τους πιάσει όλους, έχει την ιδιότητα του κυκλικού. Άρα είναι κυκλική. Στις κυκλικές ομάδες όμως, μπορεί να είναι μόνο μία. Η $\mathbb{Z}_p$.

Άρα θα μπορούσαμε να πούμε σαν δεύτερο πόρισμα ότι:

Για p πρώτο, υπάρχει μοναδική ομάδα, η $\mathbb{Z}_p$.