Ο ορισμός του αριθμού του Καραθεοδωρή

Ν.Λυγερός

Έστω ένα n- διάτατο ακέραιο πλέγμα $\mathbb{Z}^n = \{(m_1, m_2, ..., m_n) \mid m_i \in \mathbb{Z}\}$ όπου $\mathbb{Z}$ είναι το σύνολο των ακέραιων αριθμών.

Εάν $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ και $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ ανήκουν στο $\mathbb{Z}^n$, τότε

$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$ και $d_2(x, y) = \max_{1 \le i \le n} |x_1 - y_1|$ είναι δύο μετρικές με ακέραιες τιμές στο $\mathbb{Z}^n$.

Μπορούμε να ορίσουμε ένα σύνολο με μερική διάταξη (poset) στο $\mathbb{Z}^n$ με τον εξής τρόπο:

$x = (x_1, x_2, ...x_n) \le (y_1, y_2, ...y_n) = y$ αν και μόνο αν $x_i \le y_i$ για $i \in \mathbb{N}_n$.

<u>Ορισμός</u>: Ένα σημείο $z \in \mathbb{Z}^n$ είναι σε διάταξη μεταξύ x και y που ανήκουν στο $\mathbb{Z}^n$ αν $x \le z \le y$ ή $y \le z \le x$. Το σύνολο των σημείων που βρίσκονται σε διάταξη μεταξύ x και y, συμβολίζεται ως εξής: $[x, y]$. Ως σύμβαση, για σημεία που δεν συγκρίνονται έχουμε $[x, y] = \varnothing$.

<u>Ορισμός</u>: Ένα σημείο $z \in \mathbb{Z}^n$ είναι μετρικό μεταξύ x και y που ανήκουν στο $\mathbb{Z}^n$, αν

$d(x, z) + d(z, y) = d(x, y)$ όπου d είναι μία μετρική στο $\mathbb{Z}^n$. Το σύνολο όλων των σημείων που βρίσκονται μετρικά μεταξύ x και y, συμβολίζεται ως εξής: $d\langle x, y\rangle$ και ονομάζεται μετρικό τμήμα.

<u>Λήμμα</u>: Εάν $x \le y$, τότε $[x, y] = d_1\langle x, y\rangle$

<u>Ορισμός</u>: Το σύνολο $A \subseteq \mathbb{Z}^n$ είναι διαταξικό κυρτό αν $[x, y] \subseteq A$ για κάθε ζεύγος $(x, y) \in A$.

<u>Ορισμός</u>: Το σύνολο $A \subseteq \mathbb{Z}^n$ είναι μετρικό κυρτό αν $d\langle x, y\rangle \subseteq A$ για κάθε ζεύγος $(x, y) \in A$.

<u>Ορισμός:</u> Το διαταξικό (μετρικό) κυρτό κύτταρο ενός συνόλου A είναι η τομή όλων των διαταξικών (μετρικών) συνόλων που εμπεριέχουν A. Το διαταξικό (μετρικό) κυρτό κύτταρο ενός συνόλου A συμβολίζεται ως εξής: conv(A) (dconv(A)).

<u>Πόρισμα</u>: Κάθε d_1 μετρικό κυρτό σύνολο είναι διαταξικό κυρτό σύνολο.

Λήμμα: Αν $A \subseteq \mathbb{Z}^n$ είναι πεπερασμένο τότε
$d_1 conv(A) = d_1 \langle u, v \rangle$ όπου $u = \inf A$ και $v = \sup A$.

Ορισμός του αριθμού του Carathéodory:

Ο ορισμός του αριθμού του Carathéodory c για μια οικογένεια διαταξικών κυρτών (dκυρτών) συνόλων στο $\mathbb{Z}^n$ ορίζεται ως ο μικρότερος μη αρνητικός ακέραιος c τέτοιος ώστε: $conv(S) = \bigcup \{ conv(T) \mid T \leq S \ \ kai \ \ |T| \leq c \}$ όπου conv(s) συμβολίζει conv(s) ή dconv(s) ανάλογα την περίπτωση.

Ο Franklin απέδειξε το 1962 ότι ο αριθμός του Carathéodory για την οικογένεια των διαταξικών κυρτών συνόλων σε κάθε σύνολο με μερική διάταξη είναι δύο.

Ο Changat και ο Vijayakumar απέδειξαν το 1992 ότι ο αριθμός του Carathéodory για την οικογένεια των μετρικών κυρτών συνόλων στο $\mathbb{Z}^n$ είναι n.