4492) Σημείωμα περί δυνάμεων σε αριθμητική πρόοδο - Ν.Λυγερός

Το πόσο μεγάλες είναι οι αριθμητικές πρόοδοι δυνάμεων ίδιας τάξης, είναι ένα πολύ παλιό πρόβλημα της θεωρίας αριθμών. Είναι γνωστό από την αρχαιότητα ότι υπάρχουν άπειρες διαφορετικές τριάδες τετραγώνων, πρώτων μεταξύ τους, που βρίσκονται σε αριθμητική πρόοδο. Ενώ ο Pierre de Fermat απέδειξε ότι δεν υπάρχουν τέσσερα τετράγωνα σε αριθμητική πρόοδο. Μα μόνο το 1952 είχαμε μία σημαντική διαφοροποίηση, με την εργασία του P. Dénes με τίτλο *Über die Diophantische Gleichung* $x^l + y^l = cz^l$. Η ουσία της συμβολής του Dénes στον τομέα των δυνάμεων σε αριθμητική πρόοδο είναι η εξής:

<u>Εικασία</u>: Για κάθε $l \geq 3$, δεν υπάρχουν τρεις δυνάμεις τάξης $l$ σε αριθμητική πρόοδο.

Πιο πρακτικό ακόμα ως αποτέλεσμα είναι η απόδειξη του θεωρήματος.

<u>Θεώρημα:</u> (Dénes) Για $3 \leq l \leq 30$, δεν υπάρχουν τρεις δυνάμεις τάξης $l$ σε αριθμητική πρόοδο.
Είχε το ανάλογο αποτέλεσμα για άλλες 60 τιμές του $l$.

Η επόμενη αλλαγή φάσης έγινε με την περίφημη μελέτη του Gerd Faltings με τίτλο: *Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern* που δημοσίευσε το 1983. Αξίζει να σημειωθεί ότι γι' αυτό το έργο τού απονεμήθηκε το Μετάλλιο Fields. Είναι ένα από τα θεμέλια με τα έργα του Ribet και του Serre που οδήγησαν στην απόδειξη του θεωρήματος του Fermat με την καθοριστική συμβολή του Andrew Wiles το 1993. Μία από τις πολλαπλές επιπτώσεις του θεωρήματος του Faltings είναι η εξής:

<u>Θεώρημα</u>: (Faltings) Για κάθε $l \geq 5$, υπάρχει μόνο πεπερασμένος αριθμός τριάδων δυνάμεων τάξης $l$ σε αριθμητική πρόοδο.

Αντιλαμβανόμαστε όμως ότι αυτός ο πεπερασμένος περιορισμός δεν είναι άμεσος και πρακτικός. Για να ξεπεραστεί αυτή η δυσκολία, αρκεί να εξετάσουμε την εξής περίπτωση:

$l$ πρώτος αριθμός, $l \geq 3, m, d$ $\kappa\alpha\iota$ $k$ φυσικοί αριθμοί με την εξής ιδιότητα:

$m$ και $d$ είναι πρώτοι μεταξύ τους
και $k \geq 3$ έτσι ώστε $m, m+d, \ldots, m+(k-1)d$ είναι δυνάμεις τάξης $l$.

Έτσι, με τα προηγούμενα αποτελέσματα περιορίζεται μόνο από συνάρτηση του $l$.
Πιο συγκεκριμένα, ο Shorey και ο Tijdeman απέδειξαν ότι :

Έστω $c > 0$. Υπάρχει ένας υπολογίσιμος αριθμός $c_2$ που εξαρτάται μόνο από το c, τέτοιος ώστε με $k \geq c_2$ συνεπάγεται: $2^{\omega(d_1)} > (1-\varepsilon)k$

όπου $d_1$ είναι ο μέγιστος διαιρέτης του d, τέτοιος ώστε όλοι οι πρώτοι παράγοντες του $d_1$ είναι $\equiv 1(mod\ l)y$ και $\omega(d_1)$ ο αριθμός των πρώτων παραγόντων του $d_1$.