4698) Από τον τύπο του Leibniz στον τύπο του Abel - Ν. Λυγερός

Ο Niels Abel στο άρθρο του με τίτλο: Démonstration d'une expression de laquelle la formule du binome est un cas particulier, αποδεικνύει την ύπαρξη μέσω της επαγωγής ενός τύπου που γενικεύει τον τύπο του Leibniz. Ο τύπος του Abel είναι ο εξής:

$$(x+\alpha)^n = x^n + \frac{n}{1}\alpha(x+\beta)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\alpha(\alpha-2\beta)(x+2\beta)^{n-2} + \cdots$$

$$+\frac{n(n-1)\dots(n-\mu+1)}{1\cdot 2\dots\dots\mu}\alpha(\alpha-\mu\beta)^{\mu-1}(x+\mu\beta)^{n-\mu} + \cdots$$

$$+\frac{n}{1}\alpha(\alpha-(n-1)\beta)^{n-2}(x+(n-1)\beta) + \alpha(\alpha-n\beta)^{n-1}$$

Σε μία συμπαγή μορφή έχουμε:

$$(x+\alpha)^n = \sum_{\mu=0}^{n} C_n^{\mu}\cdot\alpha(\alpha-\mu\beta)^{\mu-1}\cdot(x+\mu\beta)^{n-\mu}$$

Όπου κατά τον Abel, x, α και β είναι αυθαίρετες ποσότητες και n, φυσικός αριθμός

Αν $\beta = 0$, έχουμε:

$$(x+\alpha)^n = \sum_{\mu=0}^{n} C_n^{\mu}\cdot\alpha\,\alpha^{\mu-1}\cdot x^{n-\mu} = \sum_{\mu=0}^{n} C_n^{\mu}\,\alpha^{\mu}\cdot x^{n-\mu}$$

Πράγμα που σημαίνει ότι όντως ο τύπος του Abel γενικεύει τον τύπο του Leibniz

Αν α = -x, ο Abel παρατηρεί ότι έχουμε:

$$0 = x^n - \frac{n}{1}x(x+\beta)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x(x+2\beta)^{n-1} - \frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}x(x+3\beta)^{n-1} + \cdots$$

Και μετά από διαίρεση με το x

$$0 = x^{n-1} - \frac{n}{1}(x+\beta)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}(x+2\beta)^{n-1} - \frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}(x+3\beta)^{n-1} + \cdots$$

Αυτός ο τύπος ερμηνεύεται ως $(-1)^{n-1}\Delta^n(x^{n-1})$ όταν η σταθερή διαφορά ισούται με β.

Το θεαματικό του τύπου του Abel είναι η απόδειξή του. Θεωρεί τον τύπο στην τάξη m, τον πολλαπλασιάζει με (m+1) dx και ολοκληρώνει και βρίσκει την τιμή της αυθαίρετης σταθεράς θέτοντας $x = (m+1)\beta$, λύνοντας την εξίσωση της ισότητας πολλαπλασιάζοντας το πριν το σκέλος με $(m+1)\beta$ και προσθέτει το γινόμενο με το δεύτερο σκέλος. Η εύρεση του τύπου έχει φανερά το ύφος του Abel.