

# Remarques computationnelles sur le mouvement brownien fractionnaire persistant

Pierre Gazzano – Nikos Lygeros

## 1. Introduction

Le but de cette note est l'étude des mouvements browniens fractionnaires persistants. Cette note attache une part importante aux algorithmes de simulation, mais elle n'est pas pour autant une étude de ces algorithmes. Elle représente plutôt une étude des mouvements browniens fractionnaires et de leurs propriétés, via une approche effective et expérimentale. Cette note est principalement basée sur l'ouvrage de B.Mandelbrot : Gaussian, Self Affinity and Fractals.

## 2. Définitions

### 2.1 Définition d'un processus brownien fractionnaire.

Un mouvement brownien fractionnaire est un processus  $B^H(t)$ , continu, de moyenne nulle et dont la distribution vérifie :

$$E[B^H(t + \tau) - B^H(t)] = h^{-H} E[B^H(t + h\tau) - B^H(t)]$$

La fonction de corrélation est:

$$E[B^H(t)B^H(t + \delta)] = \frac{1}{2}(|t|^{2H} + |t + \delta|^{2H} - |\delta|^{2H})$$

$H$  est communément appelé le coefficient de Hurst.

Lorsque nous avons :  $H = 0.5$ , le processus est un processus brownien classique. Tandis que lorsque nous avons :  $H > 0.5$ , le processus est dit persistant, ou à mémoire longue. Cela signifie que les valeurs du processus entre deux temps très espacés ont une corrélation faible mais non négligeable. Ceci signifie aussi que le processus brownien sera d'autant plus riche au niveau des basses fréquences que la valeur de  $H$  sera proche de 0.9 impliquant ainsi que les grandes variations ont tendance à persister.

## 3. Deux approches de la variance

### 3.1 Première approche

Les incréments sont définis par  $X(t) = B^H(t + 1) - B^H(t)$ . On démontre alors que :

$$E(\Delta X)^2 = E\left[\sum_{u=1}^{\delta} X(t + u)\right]^2 = E[\Delta B^H]^2 = C_H \delta^{2H}.$$

Et la déviation standard correspondante est :  $\sqrt{C_H \delta^{H-1}}$ . Cette expression décroît toujours vers 0 lorsque  $\delta$  tend vers l'infini, mais ce taux de décroissance dépend de H. Lorsque H augmente, cette quantité pour  $\delta$  fixé, augmente. Pour cette raison, nous avons tendance à dire qu'en prenant cette définition, les mouvements browniens fractionnaires avec un H élevé sont les plus fluctuants.

### 3.2 Seconde approche

Il est possible aussi de définir la variance de la façon suivante :

$$S^2(t, \delta) = \delta^{-1} \sum_{u=1}^{\delta} X^2(t+u) - [\delta^{-1} \Delta X]^2$$

Un calcul simple donne :

$$E[S^2(t, \delta)] \approx EX^2 - C_H \delta^{2H-2}$$

Cette quantité a pour limite  $EX^2$  lorsque  $\delta$  tend vers l'infini, mais la croissance est plus rapide lorsque H est proche de 0.5 que lorsque H est proche de 0.9. Ainsi lorsqu'un processus s'agglutine autour de sa moyenne, aussi nous disons que ce processus ne fluctue pas. Avec cette définition, les processus ayant un coefficient proche de 1 ne sont pas fluctuants.

## 4. Fast Fractal Brownian Noise Generator

Cet algorithme est issu du livre de B. Mandelbrot : Gaussian, Self Affinity and Fractals, p 340.

Soit  $B^H(t)$  un tirage d'un FBM. Un échantillon de T valeurs de  $B^H(t)$  ayant une variance égale à 1 et une moyenne nulle sera calculé comme somme d'un terme à haute fréquence et d'un terme à basse fréquence. Le processus à haute fréquence sera un processus markovien, et le processus à basse fréquence est défini comme une somme pondérée d'un nombre N(T) de termes d'un processus markovien. En d'autres termes pour calculer une valeur à l'instant t, il faudra calculer toutes les valeurs précédentes.

### 4.1 Définition du terme à basse fréquence : $B_L^H(t, H)$

$$B_L^H(t, H) = \sum_{n=1}^{N(T)} W_n X(t, r_n | MG)$$

où  $X(t, r_n | MG)$  est le processus de Markov de variance 1 et de covariance  $r_n^2 = \exp(-2B^{-n})$ .

Le poids  $W_n$  associé à  $X(t, r_n | MG)$  est la racine de

$$W_n^2 = \frac{H(2H-1)(B^{1-H} - B^{-1+H})}{\Gamma(3-2H)} B^{-2(1-H)n}$$

Le nombre  $N(T)$  vaut  $\left\lceil \frac{\log(QT)}{\log(B)} \right\rceil$ .

Enfin, le terme  $X(t, r_n | MG)$  est défini par récurrence :

$$\begin{aligned} X(1, r_n | MG) &= G_n(1) \\ X(t, r_n | MG) &= r_n X(t-1, r_n | MG) + (1-r_n^2)^{1/2} G_n(t) \end{aligned}$$

#### 4.2 Définition du terme à haute fréquence $B_H^H(t, H)$

La construction du terme à haute fréquence est indépendante de  $T$ . Le terme  $B_H^H(t, H)$  sera toujours un processus markovien. La variance est définie par :

$$1 - \frac{B^{H-1}H(2H-1)}{\Gamma(3-2H)}$$

et la corrélation d'incrément 1 vaut :

$$2^{2H-1} - 1 + \sum_{n=1}^N TW_n(1-r_n) - \frac{B^{1-H}H(2H-1)}{\Gamma(3-2H)}$$

En général, nous prenons :  $Q = 6, B = 3$ , ce qui donne  $N(T) = 10$  pour  $T = 10000$

#### 4.3 Définition intrinsèque du mouvement brownien.

La définition explicite du mouvement brownien est  $B^H(t)$  :

$$\begin{aligned} B^H(0) &= b_0 \\ B^H(t) - B^H(0) &= \frac{\int_{-\infty}^0 (t-s)^{H-1/2} - (-s)^{H-1/2} dB(s) + \int_0^t (t-s)^{H-1/2} dB(s)}{\Gamma(H+1/2)} \end{aligned}$$

L'inconvénient de cette définition, c'est qu'elle n'est pas directement implémentable car les intégrales sont divergentes lorsque nous discrétisons le calcul.

Avant de donner une deuxième définition d'un mouvement brownien fractionnaire, nous allons définir quelques fonctions.

On définit la fonction hypergéométrique par :

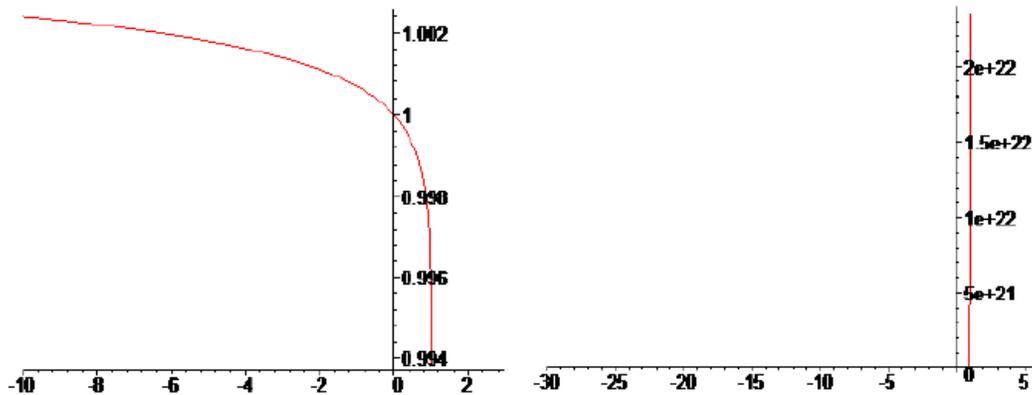
$$F_{21}(a, b, c, x) = \text{Hypergeom}([a, b], [c, ], x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{x^n}{n!}$$

où  $a, b, c$  sont des réels.

Cette fonction n'est définie que pour  $|x| < 1$ , mais nous pouvons étendre le domaine de définition de  $[-1, 1]$  à  $[-\infty, 1]$  en appliquant la formule suivante :

Si  $x < -1$  alors  $\text{Hypergeom}([a, b], [c], x) = \text{Hypergeom}([a, c - b], [c], x/(1 - x))(1 - x)^{-a}$

Deux cas de la fonction hypergéométrique sont reproduits ici :

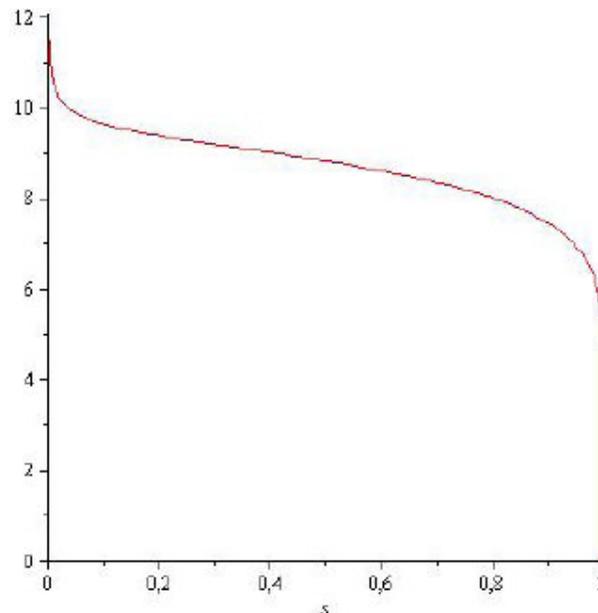


où  $a=0.0001$ ,  $b=10$  et  $c=10$  pour la première image et  $a=10$ ,  $b=1$  et  $c=0.0001$  pour la deuxième.

Nous définissons le noyau  $KH(t, s)$  de la manière suivante :

$$KH(t, s) = \frac{1}{\Gamma(H + 1/2)} (t - s)^{H-1/2} F_{21}(H - 1/2, 1/2 - H, H + 1/2, 1 - t/s)$$

Le graphique du noyau pour  $H = 0.6$  est :



Avec le noyau  $KH$ , il est possible de définir le mouvement brownien fractionnaire ainsi :

$$B(t) = \int_0^t KH(t,s)dB(s)$$

Pour comprendre la nature d'un mouvement brownien fractionnaire, on peut considérer que le mouvement brownien fractionnaire est une somme pondérée sur une mesure brownienne. Ainsi, la pondération par le noyau permet d'introduire le phénomène de mémoire.

## 5. Implémentation et calculs.

### 5.1 Etude de la variance et de la covariance

Il est possible de calculer de manière directe la variance, qui est donnée par :

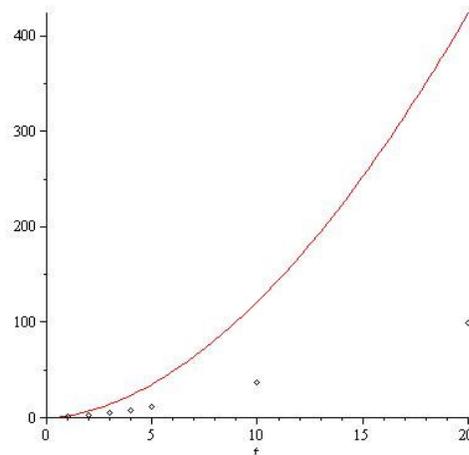
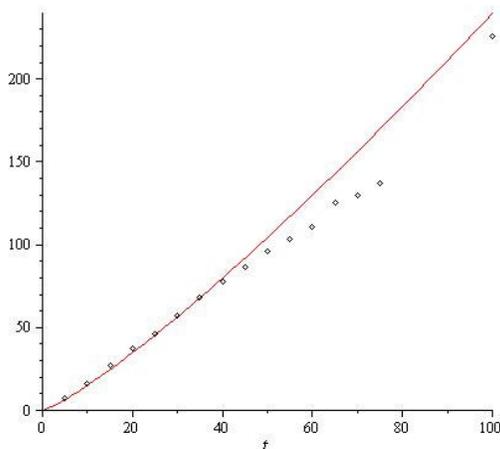
$$E(B(t_2) - B(t_1))^2 = \int_0^{t_2} f(t_2, s)^2 ds + \int_0^{t_1} f(t_1, s)^2 ds - 2 \int_0^{t_1} f(t_2, s)f(t_1, s)ds.$$

Le calcul est reproduit en annexe. Nous pourrions utiliser ce résultat, mais pour des raisons de temps de calcul, nous allons prendre la définition donnée par B. Mandelbrot, à savoir :

$$E(B(t_2) - B(t_1))^2 = (t_2 - t_1)^{2H} \frac{\int_{-\infty}^0 \left( (1-s)^{H-1/2} - (-s)^{H-1/2} \right)^2 ds + 1/2H}{\Gamma(H + 1/2)^2}$$

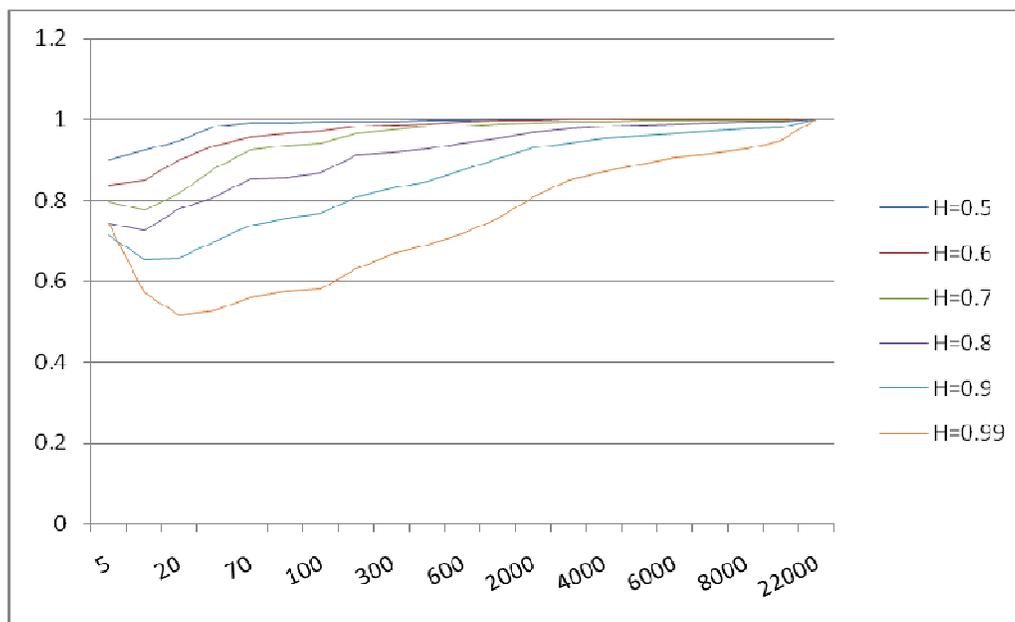
Nous avons calculé à l'aide de Maple le deuxième membre de l'égalité précédente et simulé un très grand nombre de valeurs de  $E(B(t_2) - B(t_1))^2$ .

Les graphiques suivants montrent  $E(B(t_2) - B(t_1))^2$  en fonction de  $t_2 - t_1$  pour  $H = 0.6$  et  $H = 0.9$ .



Pour des valeurs proches de  $H=0.5$ , la variance est bien reproduite pour toutes les fréquences, mais pour  $H=0.9$ , la divergence entre les résultats obtenus et la variance elle-même apparaît dès les hautes fréquences.

Nous avons ensuite étudié la deuxième définition de la variance. Nous avons implémenté la fonction, pour différentes valeurs de  $H$ . Voici les graphiques qui représentent  $E[S^2(t, \delta)]$  en fonction de  $\delta$ .

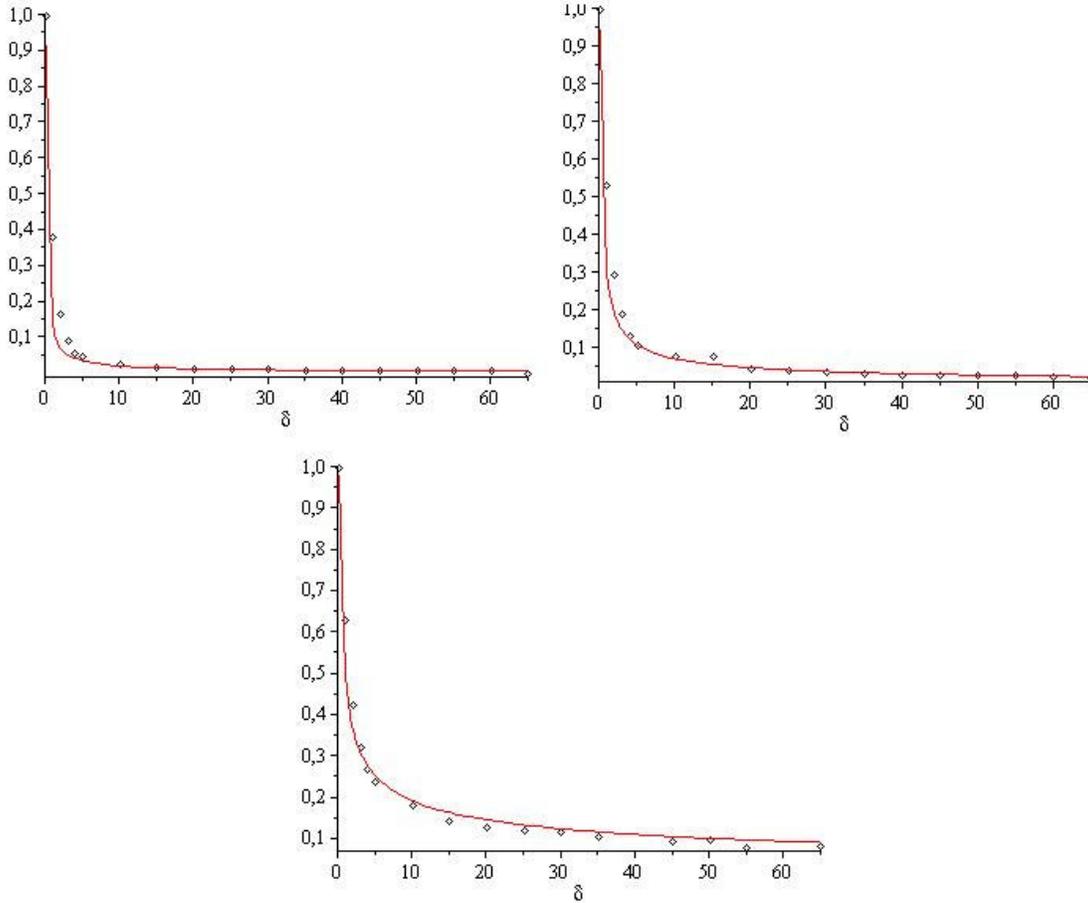


Nous avons auparavant normalisé les séries, ce qui fait que leur variance vaut 1. Le graphique montre que pour des coefficients  $H$  proches de 0.5, la quantité  $E[S^2(t, \delta)]$  croît rapidement vers 1. À l'inverse, lorsque  $H$  est proche de 1, la convergence est plus lente. Ce graphique démontre ainsi la conclusion obtenue par le calcul.

Nous avons ensuite étudié la mémoire longue d'un mouvement brownien persistant. La fonction de corrélation entre deux points espacés de  $\delta$  est :

$$E(B(t)B(t+\delta)) = \frac{1}{2} \left( |t|^{2H} + |t+\delta|^{2H} - |\delta|^{2H} \right)$$

Les trois graphiques suivants montrent la fonction de corrélation pour respectivement trois valeurs de  $H$ , à savoir :  $H=0.55, H=0.7, H=0.9$ , ainsi que les points obtenus par simulation pour différentes valeurs de  $\delta$ .



Ces graphiques démontrent que la corrélation peut-être parfaitement reproduite par un mouvement brownien obtenu avec le premier algorithme.

### 6. Annexe

$$E\left[(B(t_2) - B(t_1))^2\right] = \int_0^{t_2} f(t_2, s)^2 ds + \int_0^{t_1} f(t_1, s)^2 ds - 2 \int_0^{t_1} f(t_1, s) f(t_2, s) ds$$

En développant on obtient :

$$E\left[(B(t_2) - B(t_1))^2\right] = E\left[(B(t_1))^2\right] - 2E\left[(B(t_2) - B(t_1))\right] + E\left[(B(t_2))^2\right]$$

Grâce à l'isométrie d'Itô, on a :

$$E\left(\int_0^{t_1} f(t_1, s) dB(s)\right)\left(\int_0^{t_2} f(t_2, s) dB(s)\right) = E\left(\int_0^{t_1} f(t_2, s) dB(s)\int_0^{t_1} f(t_1, s) dB(s)\right) + E\left(\int_{t_1}^{t_2} f(t_2, s) dB(s)\int_0^{t_1} f(t_1, s) dB(s)\right)$$

$$E\left(\int_0^{t_2} f(t_2, s) dB(s)\int_0^{t_1} f(t_1, s) dB(s)\right) = E\left(\int_0^{t_1} f(t_2, s) dB(s)\int_0^{t_1} f(t_1, s) dB(s)\right) = \int_0^{t_1} f(t_2, s) f(t_1, s) ds$$

Donc :

$$E[B(t_2) - B(t_1)]^2 = \int_0^{t_2} f(t_2, s)^2 ds + \int_0^{t_1} f(t_1, s)^2 ds - 2E\left(\int_0^{t_1} f(t_1, s)dB(s)\right)\left(\int_0^{t_2} f(t_2, s)dB(s)\right)$$

$$E\left(\int_0^{t_1} f(t_1, s)dB(s)\right)\left(\int_0^{t_2} f(t_2, s)dB(s)\right) = E\left(\int_0^{t_1} f(t_2, s)dB(s)\int_0^{t_1} f(t_1, s)dB(s)\right) + E\left(\int_{t_1}^{t_2} f(t_2, s)dB(s)\int_0^{t_1} f(t_1, s)dB(s)\right)$$

Le second membre vaut 0, il reste :

$$E\left(\int_0^{t_2} f(t_2, s)dB(s)\int_0^{t_1} f(t_1, s)dB(s)\right) = E\left(\int_0^{t_1} f(t_2, s)dB(s)\int_0^{t_1} f(t_1, s)dB(s)\right) = \int_0^{t_1} f(t_2, s)f(t_1, s)ds$$