4988 - Sur les points clefs de la démonstration d'Abel

N. Lygeros

Pour démontrer l'impossibilité de résoudre par radicaux une équation générale de degré strictement plus grand que quatre, Niels Abel a utilisé certains points clefs. Le premier d'entre eux, c'est le suivant.

« Si une équation est résoluble algébriquement, on peut toujours donner à la racine une telle forme, que toute les fonctions algébriques, dont elle est composée, peuvent s'exprimer par des fonctions rationnelles des racines de l'équation proposée. »

Le second point est encore plus naturel, mais il est d'ordre préparatoire.

« Le nombre de valeurs différentes, qu'une fonction de n quantités peut acquérir par toute les permutations possibles de ces équations est nécessairement un diviseur du produit 1.2.3….n ».
Un autre point clef, tout aussi élémentaire est le suivant :

« On voit que la fonction n'est pas changée par deux permutations successives de la forme

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$$

α et β étant deux indices quelconques. Si l'on désigne une telle permutation sous le nom de *transposition*, on peut conclure que la valeur quelconque de v ne sera pas changée par un nombre pair de transpositions, et que par conséquent, toutes les valeurs de v qui résultent d'un nombre impair de transpositions sont égales ».

Et pour être plus précis, il note :

« Toute permutation des éléments d'une fonction peut s'opérer à l'aide d'un certain nombre de transpositions, donc la fonction v ne peut avoir plus que deux valeurs différentes ».

Il aboutit ainsi au théorème suivant :

« Le nombre des valeurs différentes que peut obtenir une fonction de n quantités ou ne peut être abaissé au dessous du plus grand nombre premier compris entre les facteurs de n, ou seulement à 2 ou à 1 ».

Niels Abel en conclut le point remarquable.

« Il est donc impossible de trouver une fonction de 5 quantités qui ait 3 ou 4 valeurs différentes ».

Ce résultat est dû à Cauchy. Il se trouve dans son mémoire inséré dans le 17$^{\text{ième}}$ Cahier du Journal de l'Ecole Polytechnique. Il est possible que l'utilisation de ce point dans la démonstration générale de Niels Abel ait eu des répercussions pour ce dernier, hors du contexte strictement mathématique.

L’application de ces points clefs à une équation de degré 5 donne l’impossibilité recherchée via le résultat suivant :

« Lorsqu’une fonction de plusieurs quantités a m valeurs différentes, on peut toujours trouver une équation de degré m, dont les coefficiens sont des fonctions symétriques et qui sont ces valeurs pour racines, mais il est impossible de trouver une équation de la même forme d’un degré moins élevé qui ait une ou plusieurs de ces valeurs pour racines ».