1991/20461

Nik,

Compenseurs pour la condition d'intervalle initial d'un poset

Appelons compenseur un entier relatif pour lequel
on multiplie chaque terme d'une suite déjà
connue, en vue d'obtenir une somme nulle.
Exemple classique : pour chaque suite des nombres binomiaux $n!/p!(n-p)!$
d'un même numérateur n, les entiers $(-1)^p$
constituent une suite de compenseurs, puisque

$$0=\sum_{p=0}^{n}(-1)^p n!/(p!(n-p)!)$$

Généralisons cette remarque en partant de
la notion de quotient P/Q, pour deux posets
finis P et Q. Ici nous définissons P/Q comme
le nombre des intervalles initiaux de P qui sont
isomorphes à Q. Mais une théorie semblable
aurait lieu en prenant le nombre des restrictions de P
isomorphes à Q.
Définissons la ligne du vide comme une fonction associant,
à chaque poset fini X, un compenseur a_X tel que,
pour chaque poset fixé et non vide P, la somme
$\sum a_X(P/X)=0$ (somme fini puisque
tous les quotients deviennent nuls lorsque card X dépasse
card P), le départ étant fixé par $a_\emptyset=1$ par définition.
Notons $\emptyset$ le poset vide, A_n l'antichaine de cardinal n

Exemple de calcul de compenseurs

Prenant P=A1=antichaine ou chaine singleton, et a_n le compenseur de l'antichaine A_n
nous avons $A_1/\emptyset+a_1A_1/A_1=1$
soit $1+a_1=0$ donc $a_1=-1$
Puis $A_2/\emptyset-A_2/A_1+a_2A_2/A_2=0$
soit $1-2+a_2=0$ donc $a_2=1$
Continuant ainsi, on voit que le compenseur
a_n de l'antichaine A_n est $a_n=(-1)^n$