Δομικά στοιχεία και 3x + 1 πρόβλημα

N. Lygeros

Έστω η ακολουθία: S_i για κάθε $N \in \mathbb{N}$.
$S_0 = N$ και για όλα τα $i > 0$: $S_i = S_{i-1/2}$,ενώ S_{i-1} άρτιος.
$S_i = S_{i-1.3+1}$ ενώ S_{i-1} περιττός.
Έστω: $M_x(N) = \lim_{k\to\infty} \mathrm{Max}(S_0, S_1, .., S_k)$
$M_n(N) = \lim_{k\to\infty} \mathrm{Min}(S_0, S_1, \dots, S_k)$
Εάν $M_n(N) = 1$ τότε το N συγκλίνει.
Εάν $M_x(N)$ δεν υπάρχει, τότε το N αποκλίνει,
Αλλιώς ο N είναι κυκλικός.

<u>Ασθενή εικασία</u>: Κανένα N δεν αποκλίνει.

<u>Ισχυρή εικασία</u>: Όλα τα N συγκλίνουν.

Η έννοια του Glide την εισαγωγή του θεωρήματος του Terras. Έστω $N > 1$.
$G(N) :=$ ο μικρότερος δείκτης k τέτοιος ώστε $S_k < N$
Παραλλαγή ισχυρής εικασίας: Κάθε N έχει πεπερασμένο Glide.

<u>Θεώρημα (Terras):</u> Σχεδόν όλα τα N έχουν πεπερασμένο Glide.

Το θεώρημα του Terras αποδεικνύεται με τα εξής λήμματα.
<u>Λήμμα 1</u>: Εάν το N έχει τη μορφή $\alpha \cdot 2^k \cdot b(b < 2^k)$ τότε τα πρώτα k στοιχεία του διανύσματος αρτιότητας, εξαρτώνται μόνο από το b.

<u>Λήμμα 2</u>: Έστω w_i $(0 \leq i < k)$ ένα διάνυσμα αρτιότητας μήκος k. Τότε υπάρχει κάποιο N τέτοιο ώστε $N_i(N) = w_i$ $(0 \leq i < k)$.

Έστω ο αριθμός αρτιότητας: $P_k = \sum_{i<k}(v_i \cdot 2^i)$.
<u>Λήμμα 3</u>: $P_k(M) = P_k(N) \Leftrightarrow M \equiv N \bmod 2^k$

<u>Λήμμα 4</u>: Έστω $S_0 = N$ και v_i το διάνυσμα της αρτιότητας.
Έστω $d(a,b) = \sum v_i$ $(a \leq i < b)$
Τότε $S_k \simeq T_k = S_0 \cdot 3^{d(0,k)} \cdot 2^{-k}$.

<u>Λήμμα 5</u>: Έστω v_j ένα διάνυσμα αρτιότητας μήκους k με χρόνο σύγκλισης K και M το σύνολο των φυσικών που έχουν διάνυσμα αρτιότητας το v. Τότε όλα τα άρτια μεγάλα στοιχεία του M έχουν χρόνο παύσης K.
<u>Λήμμα 6 :</u> Έστω V_k το σύνολο όλων των διανυσμάτων αρτιότητας μήκους k. Έστω W_k το υποσύνολο του V που αποτελείται από τα στοιχεία του V που αποκλίνουν. Τότε:
$\lim_{k\to\infty} \frac{|W_k|}{|V_k|} = 0$
Η έννοια του Delay οδηγεί φυσιολογικά στην έννοια του υπολοίπου.

Delay: $D(n)$
Για κάθε N, έστω K, ο μικρότερος δείκτης τέτοιος ώστε $S_k = 1$.

Delay: (Ρεκόρ)
Εάν για κάθε $M < N$ έχουμε $D(M) < D(N)$, τότε το $D(N)$ είναι ρεκόρ.
Υπόλοιπο: Για κάθε N, έστω $E(N)$ και $O(N)$ ο αριθμός των στοιχείων από S_0 έως $S_{D(N)-1}$, τα οποία είναι άρτια ή περιττά.
Έχουμε $O(N) + E(N) = D(N)$
$2^{E(N)} = 3^{O(N)} \cdot N \cdot Res(N)$ όπου $Res(N) = \prod_{i=0}^{D(N)} \left(1 - \frac{1}{3S_i}\right)$
$\mathrm{Res}(N)$ είναι το υπόλοιπο του N.
Και τώρα έχουμε δύο νέες παραλλαγές των εικασιών.

Ασθενή εικασία υπολοίπων: Υπάρχει ένας αριθμός $\mathrm{Res}_{\max}$ τέτοιος ώστε $\mathrm{Res}(N) < \mathrm{Res}_{\max}$.

Ισχυρή εικασία υπολοίπων: Για κάθε N: $\mathrm{Res}(N) \leq \mathrm{Res}(993)$