Sur un contre exemple d'Abel en analyse

N. Lygeros

Dans son article intitulé : Recherche sur la série $1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + \dots$ etc.,

Niels Abel étudie en détail l'ouvrage de Cauchy, intitulé *Cours d'analyse de l'école polytechnique* : Il mentionne à son propos qu'il « doit être lu par tout analyste qui aime la rigueur dans les recherches mathématiques ». À la fin de sa démonstration du théorème V de son article à savoir :

Théorème V : Soit $v_0 + v_1\delta + v_2\delta^2 + \dots$ etc une série convergente dans laquelle $v_0, v_1, \dots$ sont des fonctions continues d'une même quantité variable entre les limites $x = a$ et $x = b$, la série $f(x) = v_0 + v_1a + v_2a^2 + \dots$ où $a < \delta$ sera convergente et fonction continue de x entre les mêmes limites. Il est amené à considérer la continuité de $f(x)$, car sa convergence avait été traité auparavant. A la fin de cette démonstration, il ajoute en note.

« Dans l'ouvrage cité de M. Cauchy on trouve (page 131) le théorème suivant :

'Lorsque les différents termes de la série $v_0 + v_1 + v_2 + \dots$ etc. sont des fonctions d'une même variable x , continues par rapport à cette variable dans le voisinage d'une valeur particulière pour laquelle la série est convergente, la somme s de la série est aussi, dans le voisinage de cette valeur particulière, fonction continue de s '.

Mais il me semble que ce théorème admet des exceptions.

Par exemple, la série $\sin \varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi + \frac{1}{3} \sin 3\varphi - \dots$ etc. est discontinue pour toute valeur

$(2m+1)\pi$ de φ , où m est un nombre entier. Il y a comme on sait, plusieurs séries de cette espèce ».

Même si Abel ne parle que d'exceptions au théorème de Cauchy, il s'agit manifestement d'un théorème évoqué. Le style de l'époque et le respect d'Abel, ne peuvent cacher ce fait. Cette situation est d'ailleurs analogue avec celle de l'infirmité d'un autre théorème de Cauchy sur la continuité d'une suite de fonctions continues, par Baire. Dans tous les cas, le contre-exemple d'Abel est limpide.

En effet toutes les fonctions de la forme $\frac{1}{a} \sin a\varphi$ ($a \neq 0$) sont continues sur l'ensemble des nombres

réels. Ces mêmes fonctions s'annulent sur tous les points de la forme $n\pi$ ($n \in \mathbb{N}$). Aussi dans le cas

$(2m+1)\pi$ ($m \in \mathbb{N}$), il en est de même pour S . Le problème apparait donc à l'occasion des limites x_0^+ , x_0^- . La raison en est simple. Elle provient de la formule $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

Par exemple pour $a \leq \pi$, nous avons :

$$\begin{aligned} \sin(\pi + b) &= -\sin b \\ \sin(\pi - b) &= \sin b \end{aligned}$$

Cette dépendance sur b , crée une constante dans le développement de Taylor. Et l'alternance des signes de la série permet de garantir la différence de signe en x_0^+ , x_0^- .

Abel ne pouvait être plus clair en choisissant cette série.