Analyse multifractale I

P.Gazzano, N.Lygeros

L'analyse multifractale a pour but l'étude de fonctions dont la régularité ponctuelle peut varier d'un point à un autre. Ces fonctions possèdent un ensemble de singularités que l'on appelle spectre. Réaliser l'analyse multifractale d'une fonction, c'est déterminer son spectre de singularités.
Nous allons exposer dans cette note les bases de l'analyse multifractale, en définissant les exposants de singularités pour les fonctions et les dimensions fractionnaires pour les ensembles.
La plupart des théorèmes sont accompagnés d'études de cas qui illustrent les résultats.

1 Exposants de singularités

Nous supposons que les fonctions sont toutes définies sur $[0,1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Le comportement local d'une fonction peut être très erratique et les définitions habituelles de la continuité, de la dérivabilité, et généralement de la régularité ne sont pas suffisantes, et ne permettent pas d'expliquer les variations locales d'une fonction.

1.1 Continuité et exposants au sens de Hölder

Définition 1.1.1. *Continuité au sens de Hölder*
Une application Y est continue d'ordre α ***au sens de Hölder*** *s'il existe une constante k telle que :*

$$\forall x, y \in [0,1] \quad d(Y(x), Y(y)) \leq k d(x,y)^{\alpha}$$

Lorsque $\alpha = 1$ on retrouve la définition d'une fonction lipschitzienne.

Définition 1.1.2. *Une application est h-continue en un point $t \in [0,1]$ s'il existe un polynôme P_t, un voisinage V_t de t, et une constante C tels que*

$$\forall u \in V_t, \quad |Y(u) - P_t(u)| \leq C\,|u-t|^h$$

C_t^h est l'ensemble des applications de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifient cette propriété en t.

Le degré de régularité au sens de Hölder est défini par $H_t = \sup\left\{h / Y \in C_t^h\right\}$, c'est-à-dire le degré maximal tel que Y soit approximable en t par un polynôme.
On peut prendre pour polynôme P_t le polynôme de Taylor-Lagrange à l'ordre n et dans ce cas, $n \leq H_t < n+1$. En d'autres termes, H_t est l'exposant qui caractérise le premier terme singulier apparaissant dans le développement de Taylor en t :

$$Y(u) = Y(t) + (u-t)Y(t) + ... + \frac{(u-t)^n Y^{(n)}(t)}{n!} + C|x - x_0|^{H_t}$$

Le coefficient H_t caractérise bien la force de la singularité localisée en t. Plus H_t est grand plus la singularité est faible. Si H_t n'est pas entier, on peut dire que Y est dérivable en t n fois, mais pas $n+1$ fois.
Le cas le plus intéressant notamment pour l'étude des fractals, est le cas où le polynôme est une constante. Cela signifie que la fonction en t est très irrégulière, car elle n'est même pas approximable par un polynôme. C'est un cas dégénéré où $P_t \equiv Y$ au voisinage de t.

Définition 1.1.3. *En vue d'un tel cas, nous définissons un deuxième coefficient de régularité en t :*

$$h_t = \liminf_{\epsilon \to 0} \frac{\ln\left(\sup\left\{|Y(u) - Y(t)|, |u - t| < \epsilon\right\}\right)}{\ln(2\epsilon)}$$

En raison des discontinuités, il est nécessaire de considérer la limite inférieure.

Nous avons toujours $h_t \leq H_t$. Cette inégalité traduit le fait que le deuxième coefficient est plus fin que le premier. Mais si h_t n'est pas un entier naturel, alors $h_t = H_t$. Plus h_t sera petit en t, plus la fonction sera irrégulière en ce point.

Lorsque Y est de classe C^n, l'exposant H en un point de différentiabilité est égal à n, et le polynôme associé est le polynôme de Taylor-Lagrange. La plupart des cas, h_t n'est pas un entier naturel et le polynôme est réduit à une constante. Ainsi, l'approche par polynôme, comme les polynômes de Taylor, et plus généralement le résultat apporté par le théorème de Stone-Weierstrass s'effondrent. La régularité polynômiale ne permet pas d'approcher des signaux à fortes irrégularités, et une nouvelle approche est nécessaire.

1.2 Exposants de Hölder discrets

En général, il n'est pas possible de calculer directement h_t en raison de l'irrégularité locale, et aussi parce que nous ne connaissons pas d'expression explicite de Y autrement que par limite de fonctions. La multiplicité des signaux, les nombreux types d'irrégularités que l'on désire étudier et la variété des domaines d'applications des multifractals font qu'il existe un grand nombre d'exposants de natures différentes. Ainsi selon l'étude, il faudra plutôt des exposants de grain, des exposants issus de l'analyse par ondelette, des exposants de mesure...
Nous posons $k_n(t) = \lfloor t2^n \rfloor$. Alors $k_n(t)$ est l'unique entier tel que $t \in I_{k_n}^{(n)} = [k_n 2^{-n}, (k_n + 1)2^{-n}[$

Les segments $(I_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ forment une suite de fermés emboités qui convergent vers t.

Définition 1.2.1. *Le coefficient de Hölder discret en t est défini par :*

$$h_{k_n}^{(n)} = -\frac{\log_2\left(\sup\left\{|Y(u) - Y(t)| : u \in [k_n 2^{-n}, (k_n + 1)2^{-n}[\right\}\right)}{n}$$

et l'exposant de Hölder en t (1) devient :

$$h_t = \liminf_{n \to \infty} h_{k_n}^{(n)}$$

1.3 Exposants d'ondelette

L'analyse par ondelette permet un apport très riche en exposants de régularités, pour l'étude des multifractals. Le signal Y est décomposé en temps et en fréquence sur une base d'ondelettes en un terme de basse fréquence et en un terme de haute fréquence. Les deux familles d'ondelettes $(\psi_{j,k}(t))_{j,k \in \mathbb{Z}}$ et $(\phi_{j,k}(t))_{j,k \in \mathbb{Z}}$ sont :

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2}\psi(2^j t - k)$$

et

$$\phi_{j,k}(t) = 2^{j/2}\phi(2^j t - k)$$

Y se décompose sous la forme suivante :

$$\forall t \in [0,1], \quad Y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_{J_0,k}\phi_{J_0,k}(t) + \sum_{k=J_0}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{j,k}\psi_{j,k}(t)$$

et
$C_{j,k} = \int Y(t)\psi_{j,k}(t)dt$ et $D_{j,k} = \int Y(t)\phi_{j,k}(t)dt$

Pour une ondelette centrée en zéro et de fréquence f, $C_{j,k}$ mesure la quantité de signal au temps $2^{-j}k$ et à la fréquence $2^j f_0$ alors que $D_{J_0,k}$ calcule la moyenne au temps $2^{-j}k$.

Définition 1.3.1. *Nous définissons l'exposant d'ondelette de grain de Y en t par :*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad w_{k_n}^{(n)} = -\frac{\log_2\left(\left|2^{n/2}C_{n,k_n}\right|\right)}{n}$$

L'exposant $h_{k_n}^{(n)}$ donne l'exposant de Hölder exact $h(t)$ (1) mais sous la condition d'une totale absence de régularité polynomiale en t, les coefficients d'ondelette $w_{k_n}^{(n)}$ ne sont pas affectés par des tendances polynômiales. Les ondelettes sont choisies de manière à ce qu'elles soient insensibles à la présence de polynômes grâce à $\int t^m\psi(t)dt = 0$.

1.4 Exposants de mesure

Il arrive souvent que le signal à analyser soit une mesure, comme par exemple une fonction de partition. Nous pouvons alors simplifier les exposants. Supposons μ une mesure de Lebesgue sur $[0,1]$. La primitive $M(t) = \int_{t=0}^{t}\mu(ds)$ est alors un processus presque sûrement croissant, positif. La borne supérieure dans la définition de h_t se simplifie en

$$\alpha_{k_n}^{(n)} = -\frac{1}{n}\log_2\left(M((k_n+1)2^{-n}) - M(k_n 2^{-n})\right) = -\frac{\log_2 \mu(I_{k_n}^{(n)})}{n}$$

L'exposant de régularité locale des incréments est enfin défini par :

$$\alpha_t = \liminf_{t\to\infty} \alpha_{k_n}^{(n)}$$

2 Etudes de cas

2.1 1er cas d' étude : l'ensemble de Cantor

Proposition 2.1.1. *L'escalier du diable (ou fonction singulière de Lebesgue) possède un unique exposant de singularité(1) égale à $\frac{\ln(3)}{\ln(2)}$.*

Démonstration. Soit C l'ensemble de Cantor sur le segment $[0,1]$. C est un ensemble compact d'intérieur vide, qui ne possède pas de points isolés. C est l'intersection d'une suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante de fermés. La fonction singulière de Lebesgue est définie sur [0,1] par la fonction suivante :

$$Y(x) = \lim_{n\to\infty}(\frac{3}{2})^n \int_0^x \mathbf{1}_{C_n}(t)dt$$

Y est une fonction croissante, dérivable sur $[0,1[/C$.

Tout point x de l'ensemble $[0,1]$ peut s'écrire de la façon suivante de manière unique $x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{u_n}{3^n}$ où $u_n \in \{0,1,2\}$. Avec cette écriture en base triadique, il est possible d'en déduire la valeur $Y(x)$ qui sera égale à :

$$Y(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{u_k}{2^{k+1}}$$

Les poussières de Cantor ont dans leur développement triadique leurs coefficients u_k qui ne prennent que les valeurs 0 ou 2.
Soit $t \in C$. Nous allons calculer le coefficient de Hölder pour le cas particulier $t = 1/3$ pour lequel Y vaut $\frac{1}{2}$, en partant de la définition la plus générale de $h(t)$ (1).
Étant donné la définition de $h(t)$, il faut étudier la quantité

$$\sup_{u \in B(t,\epsilon)} \{|Y(t) - Y(u)|\}$$

Pour tout ϵ, on pose $N_\epsilon = \min\left(n : [(k_n - 1)3^{-n}, (k_n + 1)3^{-n}[\subset [t - \epsilon, t + \epsilon[\right)$
On a donc :

$$[(k_{N_\epsilon} - 1)3^{-N_\epsilon}, (k_{N_\epsilon} + 1)3^{-N_\epsilon}[\subset [t - \epsilon, t + \epsilon[\subset [(k_{N_\epsilon - 1} - 1)3^{-N_\epsilon + 1}, (k_{N_\epsilon - 1} + 1)3^{-N_\epsilon + 1}[$$

En posant :

$$H_n = [(k_{N_\epsilon} - 1)3^{-N_\epsilon}, (k_{N_\epsilon} + 1)3^{-N_\epsilon}[$$
$$I_n = [(k_{N_\epsilon - 1} - 1)3^{-N_\epsilon + 1}, (k_{N_\epsilon - 1} + 1)3^{-N_\epsilon + 1}[$$

$$\sup_{u \in H_n} \{|Y(t) - Y(u)|\} \leq \sup_{u \in B(t,\epsilon)} \{|Y(t) - Y(u)|\} \leq \sup_{u \in I_n} \{|Y(t) - Y(u)|\}$$

Puisque Y est croissante, continue et positive, on peut écrire :

$$\frac{1}{2} - Y((k_{N_\epsilon} - 1)3^{-N_\epsilon}) \leq \sup_{u \in B(t,\epsilon)} \{|Y(t) - Y(u)|\} \leq \frac{1}{2} - Y((k_{N_\epsilon - 1} - 1)3^{-N_\epsilon + 1})$$

Donc :

$$\log\left(\frac{1}{2} - Y(k_{N_\epsilon} 3^{-N_\epsilon})\right) \leq \log\left(\sup_{u \in B(t,\epsilon)} \{|Y(t) - Y(u)|\}\right) \leq \log\left(\frac{1}{2} - Y(k_{N_\epsilon - 1} 3^{-N_\epsilon + 1})\right)$$

$$\frac{\log\left(\frac{1}{2} - Y(k_{N_\epsilon} 3^{-N_\epsilon})\right)}{\log 3^{-N_\epsilon + 1}} \leq \frac{\log\left(\sup_{u \in B(t,\epsilon)} \{|Y(t) - Y(u)|\}\right)}{\log(2\epsilon)} \leq \frac{\log\left(\frac{1}{2} - Y(k_{N_\epsilon - 1} 3^{-N_\epsilon + 1})\right)}{\log 3^{-N_\epsilon}}$$

Or les valeurs $\left(k_n 3^{-n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ sont elles-mêmes des points de C qui convergeront vers $\frac{1}{3}$, ce qui fait que nous pouvons calculer $Y((k_{N_\epsilon} - 1)3^{-N_\epsilon})$. Plus exactement, pour $n > 1$ nous avons $\dfrac{k_n - 1}{3^n} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{2}{3^i}$, ce qui donne :

$$Y\left(\frac{k_n - 1}{3^n}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{2^{k+1}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}$$

En remplaçant dans 4 on obtient pour l'inégalité supérieure :

$$\frac{\log(\frac{1}{2^{N_\epsilon - 1}})}{\log(23^{-N_\epsilon})}$$

et

$$\frac{\log(\frac{1}{2^{N_\epsilon}})}{\log(23^{-N_\epsilon + 1})}$$

pour l'inégalité inférieure. On a alors les inégalités

$$\frac{\log(\frac{1}{2^{N_\epsilon}})}{\log(23^{-N_\epsilon + 1})} \leq h(t) \leq \frac{\log(\frac{1}{2^{N_\epsilon - 1}})}{\log(23^{-N_\epsilon})}$$

qui prouvent qu'en faisant tendre n vers l'infini, N_ϵ tend vers l'infini, on trouve :

$$h(t) = \frac{\ln(2)}{\ln(3)}$$

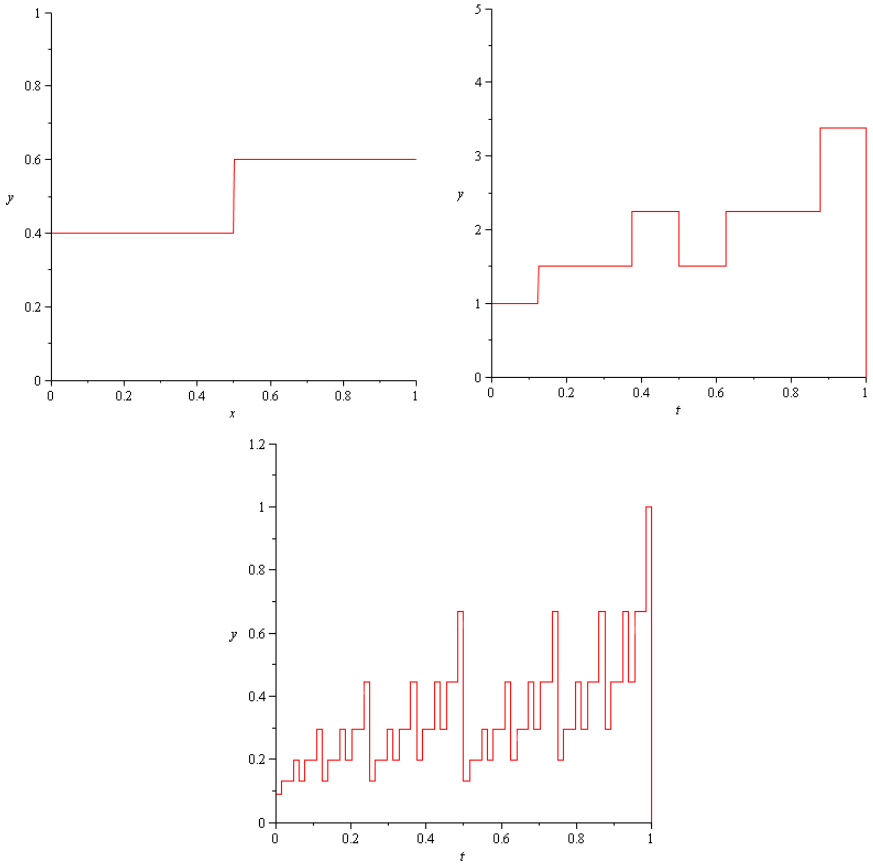
□

2.2 2eme cas d'étude : les cascades binomiales

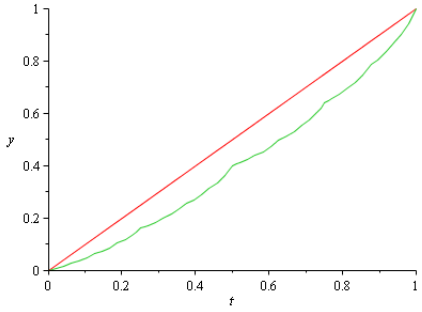
Les cascades sont fondamentales dans l'étude des multifractals. Soit $(I_{k_n}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'intervalles dyadiques de $[0,1]$. La construction des cascades binomiales consiste à calculer $\mu\left(I_{2k_{n+1}}^{n+1}\right)$ et $\mu\left(I_{2k_n}^{n+1}\right)$ à partir de $\mu\left(I_{k_n}^n\right)$ en redistribuant la masse de $I_{k_n}^n$ entre les deux sous-intervalles, avec des poids $M_{2k_n}^{n+1}$ et $M_{2k_{n+1}}^{n+1}$ tels que : $M_{2k_n}^{n+1} + M_{2k_{n+1}}^{n+1} = 1$. Au rang n, on a ainsi :

$$\mu\left(I_{k_n}^n\right) = M_{k_n}^{(n)}.M_{k_{n-1}}^{(n-1)}...M_{k_1}^{(1)}.M_0^{(0)}$$

et la cascade binomiale est construite en fixant $M(0) = M_0$ et $M((k_n+1)2^{-n}) - M(k_n 2^{-n}) = \mu(I_{k_n}^n)$



Ces trois figures représentent la mesure binomiale avec $M_0^{(0)} = 1, M_1^{(1)} = 0.4$ et $M_2^{(1)} = 0.6$ pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 6$.



La figure ci-dessus représente $M(t) = \int_{s=0}^{t} \mu(ds)$
L'intégrale d'une fonction g sur la mesure μ se calcule comme ceci :

$$\int g(t)\mu(dt) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} g(k2^{-n})\mu(I_k^{(n)}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} g(k2^{-n})(M((k+1)2^{-n}) - M(k2^{-n})) = \int g(t)dM(t)$$

2.2.1 Calcul direct

Nous prenons l'exemple d'une cascade dyadique déterministe sur $[0,1]$ avec les poids p_0 et $p_1 = 1 - p_0$.
A l'étape 1, le segment $[0,1]$ est coupé en deux parties, dont la première reçoit le poids p_0 et la deuxième reçoit le poids p_1 : $Y_1(x) = p_0$ si $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ et $Y_1(x) = p_1$ si $\frac{1}{2} < x \leq 1$
A la seconde étape, le premier segment $[0, \frac{1}{2}[$ est divisé en deux, la première partie $[0, \frac{1}{4}]$ reçoit le poids p_0 et la deuxième partie $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}[$ reçoit le poids p_1 et le même schéma se répète pour le segment $[\frac{1}{2}, 1[$:

$$Y_2(x) = \begin{cases} p_0^2 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{4}[\\ p_0 p_1 & \text{si } x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}[\\ p_1 p_0 & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}[\\ p_1^2 & \text{si } x \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}$$

A l'étape n, nous aurons :

$$Y_n(x) = p_0^{n\phi_0} p_1^{n\phi_1}$$

où ϕ_0 et ϕ_1 sont les nombres de 1 et de 0 dans l'écriture dyadique de x.

2.2.2 Décomposition en ondelette

On décompose la mesure binomiale suivant l'ondelette de Haar.
Pour la mesure binomiale, nous avons :

$$D_{n,k_n}(\mu) = \int \psi^*_{j,k_n}(t)\mu(dt) = 2^{n/2} \int_{k_n 2^{-n}}^{(k_n+1)2^{-n}} \mu(dt) = 2^{n/2}\mu(I_{k_n^{(n)}})$$

$$2^{-n/2} C_{n,k_n}(\mu) = \mu(I_{2k_n}^{(n+1)}) - \mu(I_{2k_{n+1}}^{(n+1)}) = \prod_{i=0}^{n} M_{k_i}^{(i)} (M_{2k_n}^{(n+1)} - M_{2k_n+1}^{(n+1)})$$

Pour la fonction de partition de la mesure binomiale, nous avons :

$$2^{-n/2} C_{n,k_n}(M) = \int \psi(2^n t - k_n) M(t) dt = \int_{I_{k_n}^{(n)}} \psi(2^n t - k_n)(M(t) - M(k_n 2^{-n}) dt$$

donc[1] :

$$2^{-n/2} C_{n,k_n}(M) = 2^{-n}.M_{k_n}^{(n)} ... M_{k_1}^{(1)} . \int_0^1 \psi(t') M^{(n,k_n)}(t') dt'$$

On en déduit les coefficients de singularité d'ondelette :

$$w_{k_n}^{(n)} = -\frac{2^n \ln\left(\prod_{i=0}^{n} M_{k_i}^{(i)} (M_{2k_n}^{(n+1)} - M_{2k_n+1}^{(n+1)})\right)}{\ln(2^n)}$$

[1] On a pris une ondelette ψ telle que $\int \psi$ sur $[0,1]$

2.3 3eme cas d'étude : le mouvement brownien

Un mouvement brownien X vérifie la condition de Hölder presque sûrement :

Proposition 2.3.1. *Soit $\lambda \in [0, \frac{1}{2}]$. Il existe H_0 et b tels que pour tout $h < H_0$ on a :*

$$|X(\omega, t+h) - X(\omega, t)| \leq bh^{\lambda}$$

avec une probabilité de 1.

Démonstration. Pour démontrer ce théorème, nous allons montrer que la suite dyadique vérifie cette propriété, puis nous passerons ensuite à la limite. Pour cela, on considère la suite de points dyadique $\left\{X_j(m2^{-j}) - X_j((m-1)2^{-j})\right\}$ où $j \in \mathbb{N}$ et $m \in \left\{0, ..., 2^j\right\}$, qui a une moyenne nulle et une variance de 2^{-j}.

Fixons $\lambda \in]0, \frac{1}{2}[$. On doit donc démontrer que

$$\exists k > 0 \quad \mu\left(\left\{\omega : \forall j \geq k, \forall m \in [1..2^j], |X_j(\omega, m2^{-j}) - X_j(\omega, (m-1)2^{-j})| \leq 2^{-j\lambda}\right\}\right) = 1$$

Soit, en passant au complémentaire, on doit démontrer :

$$\forall k > 0 \quad \mu\left(\left\{\omega : \exists j \geq k, \exists m \in [1..2^j], |X_j(\omega, m2^{-j}) - X_j(\omega, (m-1)2^{-j})| > 2^{-j\lambda}\right\}\right) = 0$$

En appellant $B_{m,j} = \left\{\omega : |X_j(\omega, m2^{-j}) - X_j(\omega, (m-1)2^{-j})| > 2^{-j\lambda}\right\}$,
on a[2] :

$$A_k = \bigcup_{j>k} \bigcup_{m=1}^{2^j} B_{m,j} = \left\{\omega : \exists j \geq k, \exists m \in [1..2^j], |X_j(\omega, m2^{-j}) - X_j(\omega, (m-1)2^{-j})| > 2^{-j\lambda}\right\}$$

Le théorème de Borel-Cantelli permet de dire que $\mu\left(\limsup_k A_k\right) = 0$ si $\mu\left(A_k\right) < \infty$, c'est à dire si :

$$\sum_{j>k} \sum_{m=1}^{2^j} \mu\left(B_{m,j}\right) < \infty$$

En utilisant l'inégalité de Tchebychef, on a :

$$\mu\left(\left\{\omega : \left|X_j(m2^{-j}, \omega) - X_j((m-1)2^{-j}, \omega)\right| > 2^{-j\lambda}\right\}\right) \leq \frac{2^{-j}}{2^{-2j\lambda}} = \frac{1}{(2^{-j})^{2\lambda-1}} \leq 2^{-2j}$$

Donc :

$$\sum_{j>k} \sum_{m=1}^{2^j} 2^{-2j} = \sum_{j>k} 2^{-j} < \infty$$

Nous en déduisons que

$$\mu\left(\limsup_m A_m\right) = 0$$

Cela signifie que l'ensemble des ω tels que ces ω appartiennent à une infinité de A_k est de mesure nulle. Pour tout ω (sauf pour un ensemble maigre), il existe un $K(\omega)$ tel que ω n'est plus dans A_k à partir de ce rang : $\forall k \geq K(\omega), \omega \notin A_k$,
Soit :

$$\forall j \geq K(\omega), \forall m/1 \leq m \leq 2^j, \left|X_j(\omega, (m2^{-j})) - X_j(\omega, (m-1)2^{-j})\right| \leq 2^{-j\lambda}$$

avec une probabilité de 1.

[2] A_k est mesurable car réunion dénombrable d'ensembles mesurables

On pose donc $H_0 = 2^{-K(\omega)}$

On peut considérer qu'il existe une suite de points dyadique $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers t et une suite de points dyadique $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $t+h$, tels que :

$$2\,|a_{n+1} - a_n| \leq |a_n - a_{n-1}|$$

$$2\,|b_{n+1} - b_n| \leq |b_n - b_{n-1}|$$

et tels que : $|a_0 - b_0| \leq 2^{-k}$ avec $2^{-k} \leq h \leq H_0$
Avec une probabilité de 1, nous avons alors :

$$|X(t+h) - X(t)| \leq \lim_{n\to\infty} |X(t+h) - X(a_n)| + \sum_{j=0}^{n} |a_{j+1} - a_j| + |X(a_0) - X(b_0)| + \sum_{j=0}^{n} |b_{n+1} - b_n| + |X(t) - X(b_n)|$$

Donc :

$$|X(t+h) - X(t)| \leq 2\sum_{j=k}^{\infty} 2^{-j\lambda} \leq \frac{2h^{\lambda}}{1-2^{-\lambda}}$$

En fixant $\lambda \in]0, \frac{1}{2}[$, nous avons trouvé un $H_0 > 0$ tel qu'il existe un coefficient b tel que pour tout $|h| < H_0$ on a :

$$|X(t+h) - X(t)| \leq b|h|^{\lambda}$$

presque sûrement. □

3 Dimension fractionnaire

La définition habituelle de la dimension topologique montre que l'ensemble de Cantor possède une dimension topologique de 0. Cependant, avec la dimension de Hausdorff (qui vérifie les axiomes de la théorie de la mesure au sens de Lebesgue), nous montrons que la dimension de cet ensemble vaut $\ln(2)/\ln(3)$. Nous voyons, comme dans le cas des fonctions, que les définitions habituelles dégénèrent avec les ensembles fractals, et que de nouvelles définitions doivent être considérées. Ainsi, tout comme le fait qu'une fonction fractale aura un exposant de Hölder inférieur à son coefficient polynomial, un ensemble fractal sera caractérisé par le fait que sa dimension de Hausdorff est strictement supérieure à sa dimension topologique.

3.1 Dimension de boîtes

Nous définissons les dimensions de boîtes, qui sont très utiles pour l'approximation de dimensions fractionnaires. Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$. On fixe $\epsilon > 0$, et on considère les pavés de $\mathbb{R}^2$ de la forme $[i\epsilon, (i+1)\epsilon]\times[j\epsilon, (j+1)\epsilon]$. On note ensuite $N_\epsilon(E) = \mathrm{Card}([i\epsilon, (i+1)\epsilon]\times[j\epsilon, (j+1)\epsilon] : \quad E \subset [i\epsilon, (i+1)\epsilon]\times[j\epsilon, (j+1)\epsilon])$

Définition 3.1.1. *La dimension de boîte de E est alors définie par :*

$$\dim_B(E) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\ln(N_\epsilon(E))}{-\ln(\epsilon)}$$

Nous définissons aussi :

Définition 3.1.2.

$$\overline{\dim_B}(E) = \limsup_{\epsilon\to 0} \frac{\ln(N_\epsilon(E))}{-\ln(\epsilon)}$$

$$\underline{\dim_B}(E) = \liminf_{\epsilon\to 0} \frac{\ln(N_\epsilon(E))}{-\ln(\epsilon)}$$

Cette définition de la dimension équivaut à dire que pour tout $\epsilon < \dim_B(E)$ alors

$$N_\epsilon(E)\epsilon^s \to \infty$$

et pour tout $\epsilon > \dim_B(E)$ on a

$$N_\epsilon(E)\epsilon^s \to 0$$

3.2 Dimension de Hausdorff

Définition 3.2.1. *Mesure de Hausdorff*
Soit E un sous ensemble de $[0,1]$. On pose :

$$\mu_{p,\epsilon}(E) = \inf\left\{\sum_{n=0}^{\infty}(\delta(U_n))^p : \quad E \subset \bigcup U_n, \quad U_n \text{ ouvert}, \quad \delta(U_n) < \epsilon\right\}$$

Alors pour toute partie de E, la fonction $\epsilon :\to \mu_{p,\epsilon}(E)$ est décroissante et la fonction définie par :

$$\mu_{p,\epsilon} : E \to \mu_{p,\epsilon}(E) = \lim_{\epsilon\to 0}\mu_{p,\epsilon}(E)$$

est une mesure extérieure

Cf *Laurent Schwartz, Analyse III.*

Comme la fonction $\epsilon :\to \mu_{p,\epsilon}(E)$ est décroissante et positive, on peut lui associer une limite :

$$\mu_p(E) = \lim_{\epsilon\to 0}\mu_{p,\epsilon}(E) = \sup_{\epsilon}\mu_{p,\epsilon}(E)$$

Définition 3.2.2. *Dimension au sens de Hausdorff*

On appelle dimension au ***sens de Hausdorff*** *la borne supérieure des nombres réels p tels que $\mu_p(E) = \infty$. On note par $\dim_H(E)$ cette dimension :*

$$\dim_H(E) = \sup\{p > 0 : \mu_p(E) = \infty\}$$

Il existe bien sûr un lien entre la dimension de Hausdorff et la dimension de boîtes. Si un ensemble E peut être recouvert par $N_\epsilon(E)$ ensembles de diametres ϵ, alors par définition : $\mu_{p,\epsilon}(E) \leq N_\epsilon(E)\epsilon^p$.
Dans la définition de la dimension de boîtes, le même poids $|\delta|^s$ est attribué à tous les ensembles de recouvements, alors que la dimension de Hausdorff associe des poids $|U_i|^s$

4 Etudes de cas

4.1 1er cas d' étude : l'ensemble de Cantor

Proposition 4.1.1. *L'ensemble de Cantor à une dimension de Hausdorff de $\frac{\ln(2)}{\ln(3)}$*

Cf *Laurent Schwartz, Analyse III.*

4.2 2^{ieme} cas d' étude : le mouvement brownien

Proposition 4.2.1. *Le graphe d'un mouvemen brownien $X : [0,1] \to \mathbb{R}$ à une dimension de Hausdorff presque sûrement de $\frac{1}{2}$.*