Analyse multifractale II

P.Gazzano, N.Lygeros

Ainsi que nous l'avons vu dans la note précédente, les valeurs du coefficient de Hölder peuvent varier d'un point à un autre. L'analyse multifractale a pour but de caractériser l'évolution de h_t en fonction de t, et de déterminer l'ensemble de points dans $[0,1]$ qui ont le même exposant h_t. Nous considérons pour la suite un coefficient fictif $s_t = \lim_n s^{(n)}_{k_n(t)}$ qui peut être l'exposant de Hölder, l'exposant de mesure ou l'exposant d'ondelette. L'objectif de cette note est de poursuivre l'étude en introduisant les spectres multifractals, dans le cas déterministe puis dans le cas aléatoire. Les propositions sont illustrées par des études de cas pour des processus déterministes. L'application pour des processus stochastiques sera étudiée dans une prochaine note.

1 Formalisme pour les processus déterministes

1.1 Spectre de Hausdorff

Nous définissons les ensembles $E^a = \{t : \liminf_n s^{(n)}_{k_n}(t) = a\}$ et $K^a = \{t : \lim_n s^{(n)}_{k_n}(t) = a\}$, c'est-à-dire l'ensemble des points t qui admettent le même exposant. Dans tous les cas, $\{E^a\}_{a\in\mathbb{R}}$ forment une partition de $[0,1]$, mais une répartition complexe de ces ensembles dans $[0,1]$ traduira la nature multifractale de l'objet considéré. Les sous-ensembles $\{E^a\}_{a\in\mathbb{R}}$ ont alors une dimension non entière.

Définition 1.1.1. *Le **spectre de Hausdorff** f est défini par :*

$$f : a \to \dim_H(E^a)$$

où $\dim_H$ est la dimension de Hausdorff. C'est donc l'application qui associe la dimension de Hausdorff de l'ensemble des points t de $[0,1]$ qui possèdent le même exposant d'irrégularité a. Il s'agit donc d'une fonction définie sur l'ensemble des réels positifs à valeurs dans $[0,1]$. Le spectre f du processus décrit la répartition statistique des exposants a sur le support de la fonction étudiée. Le processus étudié sera dit autosimilaire si le spectre est réduit à un point, et multifractal si le spectre est une courbe. Le but de l'analyse multifractale et de tracer le graphe de f.

1.2 Spectre de grain

Nous associons aux dimensions de boîtes un spectre de grain, de la même manière que nous associons un spectre à la dimension de Hausdorff. Les boîtes permettent d'estimer $\dim_H(E^a)$ en comptant les intervalles de $[0,1]$ pour lesquels Y possède approximativement l'exposant a.

Définition 1.2.1. *Soit $n \in \mathbb{N}, a > 0, \epsilon > 0$ l'ensemble $A_{\epsilon,n}$ est défini par*

$$A_{\epsilon,n} = \{k = 0 \dots 2^n - 1 : |s^{(n)}_k - a| < \epsilon\}$$

et $N^{(n)}(a,\epsilon)$ par

$$N^{(n)}(a,\epsilon) = \mathrm{Card}(A_{\epsilon,n})$$

$N^{(n)}(a,\epsilon)$ compte à l'échelle n, le nombre d'exposants de grain qui sont égaux à a, à ϵ-près. Il est possible de considérer la suite $\left\{N^{(n)}(a,\epsilon)\right\} n \in \mathbb{N}$. La suite n'est pas a priori convergente, mais il est évident que

$$\forall a > 0, \forall \epsilon > 0, \quad N^{(n)}(a,\epsilon) \leq 2^n$$

et la suite $\overline{f_\epsilon}(a) = \left\{\limsup_{n\to\infty} \frac{\ln(N^{(n)}(a,\epsilon))}{n\ln(2)}\right\}_{\epsilon>0}$ est bien définie.
Comme $\forall n \in \mathbb{N} \quad N^{(n)}(a,\epsilon_1) \leq N^{(n)}(a,\epsilon_2)$ pour $\epsilon_1 < \epsilon_2$, la suite $\overline{f_\epsilon}(a)$ est croissante.
Les spectes de grains sont définis comme la limite supérieure et inférieure de cette suite.

Définition 1.2.2. *Soit $a > 0$, les spectres de grains inférieurs et supérieurs sont définis par :*

$$\overline{f}(a) = \lim_{\epsilon\to 0} \limsup_{n\to\infty} \frac{\ln(N^{(n)}(a,\epsilon))}{n\ln(2)}$$

et lorsque la suite $\{N^{(n)}(a,\epsilon)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée.

$$\underline{f}(a) = \lim_{\epsilon\to 0} \liminf_{n\to\infty} \frac{\ln(N^{(n)}(a,\epsilon))}{n\ln(2)}$$

$\overline{f}(a)$ et $\underline{f}(a)$ décrivent le comportement de l'histogramme $N^{(n)}(a,\epsilon)$ quand ϵ tend vers 0.
Ces notions de grains sont utilisées pour faire face aux difficultés du calcul de la dimension de Hausdorff.
En utilisant un filtre de grains de différentes tailles de plus en plus fines, on aboutit à des notions plus simples à calculer.
D'une manière générale, nous avons la proposition suivante :

Proposition 1.2.1. *Soit $a \in \mathbb{R}^+$, tel que E^a ne soit pas vide, alors :*

$$\dim_H(E^a) \leq \overline{f}(a)$$

$$\dim_H(K^a) \leq \underline{f}(a)$$

Démonstration. Soit $a \in \mathbb{R}$. Supposons que $\dim_H(E^a) > \overline{f}(a)$.
Cela signifie :

$$\exists p > 0/\ \mu_p^*(E^a) = \infty \text{ tel que } \overline{f}(a) < p$$

Comme la suite $\left\{\mu_{p,\epsilon}^*\right\}_{\epsilon>0}$ est décroissante, alors

$$\exists p > 0/\ \forall \epsilon > 0\ \mu_{p,\epsilon}^*(E^a) = \infty \text{ tel que } \overline{f}(a) < p$$

La suite $\overline{f_\epsilon}(a)$ étant croissante, nous avons $\overline{f_\epsilon}(a) < p$, c'est-à-dire : $\forall \epsilon > 0$, $\limsup_{n\to\infty} \frac{\ln(N^{(n)}(a,\epsilon))}{n\ln(2)} < p$
On en déduit l'existence d'un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > N$ et pour tout $\epsilon > 0$ nous avons :

$$N^{(n)}(a,\epsilon) < 2^{np}$$

où p vérifie : $\forall \epsilon > 0, \mu_{p,\epsilon}^*(E^a) = \infty$
Nous allons construire un recouvrement de E^a. Si $t \in E^a$ alors $\liminf_{n\to\infty} s_{k_n}^{(n)} = a$ donc

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_t \in \mathbb{N}/\forall n > N_t, |\inf_n\{s_{k_m}^{(m)}, m \geq n\} - a| < \epsilon$$

Si $n = N_t + 1$, alors $a - \epsilon < \inf_n\{s_{k_m}^{(m)}, m \geq N_t + 1\} < a + \epsilon$, et nous appelons

$$s_{k_{m_{N_t+1}}}^{(m_{N_t+1})} = \inf_n\{s_{k_m}^{(m)}, m \geq N_t + 1\}$$

Lorsque $n = N_t + 2$: $a - \epsilon < \inf_n \{s_{k_m}^{(m)}, m \geq N_t + 2\} < a + \epsilon$ et nous appelons

$$s_{k_{m_{N_t+2}}}^{(m_{N_t+2})} = \inf_n \{s_{k_m}^{(m)}, m \geq N_t + 2\}$$

On construit ainsi par récurrance une sous-suite de la suite $s_{k_n}^{(n)}$ et on appelle $J(t)$ l'ensembles des indices de la sous-suite :

$$J(t) = \{k_{m_{N_t+1}}, k_{m_{N_t+2}}, ...\}$$

Alors : $t \in \bigcup_{k_n \in J(t)} I_{k_n}^{(n)}$

Considérons maitenant[1], $N = \inf_{t \in E^a} N_t$

Si nous considèrons maintenant $J(N) = \bigcup_{t \in E^a} J(t)$, alors

$$J(N) = \bigcup \{k_n : n \geq N, a - \epsilon \leq s_{k_n}^{(n)} \leq a + \epsilon\}$$

Cet ensemble est indépendant de t et dénombrable. Nous pouvons alors considérer que les ensemble $I_{k_n}^{(n)}$ avec $k_n \in J(N)$ forment une recouvement de E^a, ayant tous une taille inférieur à 2^{-m}

$$\sum_{k_n > m}^{\infty} |I_{k_n}^{(n)}|^p = \sum^{\infty} N^{(n)}(a, \epsilon) 2^{-np} \leq \sum^{\infty} 2^{np} 2^{-mp} < \infty$$

Ceci est absurde avec le fait que pour tout recouvrement E de E^a, on a $\mu_{p,\epsilon}^*(E) = \infty$.

□

En règle générale, il existera une valeur $a = \hat{a}$ pour laquelle $f(a)$ atteindra sont maximum $f(\hat{a}) = 1$. C'est-à-dire qu'il y aura une singularité qui sera beaucoup plus présente dans le signal que d'autres singularités. Ceci revient à dire que la suite $s_{k_n}^{(n)}$ aura le plus souvent $\hat{a}$ pour limite. Pour d'autres valeurs de a, la probabilité d'obtenir un exposant de singularité dans $[a - \epsilon, a + \epsilon]$ diminuera avec un taux exponentiel de $f(a)$.

1.3 Théorème des grandes déviations et fonction de partition

$N^{(n)}(a, \epsilon)$ est le nombre d'exposants $s_{k_n}^{(n)}$ à l'échelle n qui sont à une distance de ϵ de a. En d'autres termes, $N^{(n)}(a, \epsilon)$ est le nombre de k_n parmi l'ensemble $\Omega = \{0, ..., 2^n - 1\}$ dont $s_{k_n}^{(n)}$ se trouve à une distance ϵ de a :

$$N^{(n)}(a, \epsilon) = \text{Card}(k = 0...2^n - 1 : a - \epsilon \leq s_k^{(n)} < a + \epsilon)$$

Il y en a au plus 2^n. Nous appelons A_ϵ l'événement $\{k_n \in \Omega : |s_{k_n}^{(n)} - a| < \epsilon\}$, élément de la $\sigma-$algèbre engendrée par les A_ϵ. Nous obtenons un espace mesuré (Ω, σ, μ) où μ est définie par :

$$\mu(A) = \mu\left(\left\{k \in \Omega : |s_{k_n}^{(n)} - a| < \epsilon\right\}\right) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{N^{(n)}(a, \epsilon)}{2^n}$$

Dans ce cas, il s'agit d'une probabilité, qui se ramène à un calcul de dénombrement.
D'après le théorème des grandes déviations, $\frac{\ln(P(\{(X_n \geq a)\}))}{n}$ tend vers $-\Lambda(q)$ lorsque n tend vers l'infini, où $\Lambda(q)$ est la transformée de Legendre de la fonction génératrice des moments.

[1] Cet inf existe car aucun N_t n'est égale à l'infini

1.4 Fonction génératrice des moments, Fonction de partition

Soit X une variable aléatoire dans un espace de probabilité (Ω, σ, P) . La **fonction génératrice des moments** est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$M_X(t) = E\left(e^{tX}\right)$$

Dans notre cas $\Omega = \{0, ..., 2^n - 1\}$. Nous posons la fonction h définie sur Ω par :

$$h : k_n \to 2^{-nqs_{k_n}^{(n)}}$$

Alors :

$$\mathbb{E}\left(h(k_n)\right) = \int_\Omega h(k_n)P(dx) = \sum_{k=0}^{2^n-1} h(X_k)P(k_n = k) = \sum_{k=0}^{2^n-1} 2^{-nqs_{k_n}^{(n)}} P(k_n = k) = \sum_{k=0}^{2^n-1} 2^{-nqs_{k_n}^{(n)}} \frac{1}{2^n}$$

En posant $A_{k_n} = -nqs_{k_n}^{(n)} \ln(2)$ nous avons : $\displaystyle\sum_{k_n=0}^{2^n-1} e^{-nqs_{k_n}^{(n)} \ln(2)} \frac{1}{2^n} = \mathbb{E}\left(e^{qA_{k_n}}\right)$

Nous définissons $S_n(q)$ par :

$$S_n(q) = \sum_{k=0}^{2^n-1} e^{-nqs_{k_n}^{(n)} \ln(2)} = 2^n \mathbb{E}\left(e^{qA_{k_n}}\right)$$

Définition 1.4.1. *Nous pouvons définir la **fonction de partition** d'une fonction Y pour tout $q \in \mathbb{R}$*

$$\tau(q) = -\liminf_{n\to\infty} \frac{\ln(S^{(n)}(q))}{\ln(2^n)}$$

avec

$$S^{(n)}(q) = \sum_{k=0}^{2^n-1} 2^{-nqs_{k_n}^{(n)}} = 2^n E\left[2^{-nqs_{k_n}^{(n)}}\right]$$

Nous pouvons simplifier l'expression de $S_n(q)$ sachant que par définition,

$$-n\ln(2)s_{k_n}^{(n)} = \ln\left(\sup\{|Y(u) - Y(t)|, \quad u \in [(k_n - 1)2^{-n}, (k_n + 2)2^{-n}[\}\right)$$

Donc :

$$\begin{aligned} S^{(n)}(q) &= \sum_{k=0}^{2^n-1} \exp(q \ln \sup\left\{|Y(u) - Y(t)|, \quad u \in [(k_n - 1)2^{-n}, (k_n + 2)2^{-n}[\right\}) \\ &= \sum_{k=0}^{2^n-1} \sup\left\{|Y(u) - Y(t)|, \quad u \in [(k_n - 1)2^{-n}, (k_n + 2)2^{-n}[\right\}^q \end{aligned}$$

Lorsque le processus étudié est une fonction de répartition, $S^{(n)}(q)$ se réduit à $\displaystyle\sum_{k=0}^{2^n-1} \mu\left(I_k^{(n)}\right)^q$ qui est une expression de $S^{(n)}$ que l'on retrouve souvent.

Notons deux valeurs remarquables : pour $q = 0$ nous avons $\tau(0) = -1$ et pour $q = 1$ nous avons $\tau(1) = 0$

Proposition 1.4.1. *Pour tout $a > 0$, nous avons*

$$\overline{f}(a) \leq \tau^*(a)$$

Démonstration. Supposons que pour tout $a > 0$ on ait $\overline{f}(a) > \tau^*(a)$. Pour tout q, il existe $\alpha > 0$ tel que l'on ait :

$$\tau^*(a) < -|q|\alpha + \overline{f}(a)$$

Par définition de $\tau^*(q)$, il existe q_1 tel que $aq_1 - \tau(q_1) < -|q|\alpha + \overline{f}(a)$. Il existe ensuite ϵ_1 tel que $\forall \rho < \epsilon_1$, $aq_1 + |q|\alpha < \overline{f}_\rho(a) + \tau(q_1)$. Or :

$$\overline{f}_\rho(a) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\ln(N^{(n)}(a,\rho))}{n\ln(2)}$$

$$\tau(q_1) = \liminf_{n\to\infty} \frac{-\ln(S^{(n)}(q_1)}{n\ln(2)}$$

$$\forall \rho < \epsilon_1, aq_1 + |q|\alpha < \limsup_{n\to\infty} \frac{\ln(N^{(n)}(a,\rho))}{n\ln(2)} - \limsup_{n\to\infty} \frac{\ln(S^{(n)}(q_1))}{n\ln(2)}$$

$$\forall \rho < \epsilon_1, aq_1 + |q|\alpha < \limsup_{n\to\infty} \frac{\ln(N^{(n)}(a,\rho)/S^{(n)}(q_1))}{n\ln(2)}$$

En posant la suite

$$w_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \frac{\ln(N^{(k)}(a,\rho)/S^{(k)}(q_1)}{k\ln(2)}, k \geq n \right\}$$

Donc :

$$\exists \epsilon_1 > 0 / \forall \rho < \epsilon_1, \forall n \in \mathbb{N} \quad aq_1 + |q|\alpha < \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \frac{\ln(N^{(k)}(a,\rho))/S^{(k)}(q_1)}{k\ln(2)}, k \geq n \right\}$$

Par définition de la borne supérieure, on a :

$$\exists \epsilon_1 > 0 / \forall \rho < \epsilon_1, \forall n \in \mathbb{N}, \exists k / \quad 2^{\alpha q_1 k + |q|\alpha k} < N^{(k)}(a,\epsilon)/S^{(k)}(q_1)$$

or

$$S^{(k)}(q_1) \geq N^{(k)}(a,\rho) 2^{-kq_1\alpha + |q_1|\rho k}$$

$$2^{|q_1|\rho k + |q|\alpha k} < 1$$

Or, ceci est vrai pour tout ρ, donc en faisant tendre ρ vers 0, on a :

$$2^{|q|\alpha k} < 1$$

ce qui est faux, car $|q| > 0, k > 0, \alpha > 0$.
Donc

$$\overline{f}(a) \leq \tau^*(a)$$

□

Le théorème suivant est l'aboutissement de l'analyse multifractale puisqu'il permet de calculer le spectre $\overline{f}$ de manière explicite à partir de la fonction de partition. En appliquant une forme légèrement modifiée du théorème des grandes déviations, nous obtenons :

Proposition 1.4.2. *Si la limite $\tau(q) = -\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(S^{(n)}(q))}{\ln(2^n)}$ existe pour tout q et si τ est une fonction différentiable en q, alors la double limite $\overline{f}(a) = \lim_\epsilon \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(N^{(n)}(a,\epsilon))}{\ln(2^n)}$ existe, et en particulier $\overline{f}(a) = \underline{f}(a)$. Nous avons de plus*

$$\overline{f}(a) = \tau^*(a) = \inf_{q\in\mathbb{R}}(qa - \tau(q))$$

$$\overline{f}(a) \leq \tau^*(a)$$

D'une manière générale, nous avons uniquement l'inégalité entre $\overline{f}(a)$ et $\tau^*(a)$ (2,4)pour tout a. Cette inégalité est très importante, car nous voyons que τ^* est l'enveloppe convexe du spectre multifractal. Dans le cas général, il n'est pas égal au spectre multifractal, mais dans le cas où il y a égalité, nous pouvons tracer le graphe du spectre en utilisant l'approche discrète avec les exposants de grains, les dimensions de boîtes et les spectres de grain. On parle dans ce cas de **formalisme multifractal**.

2 Formalisme pour un processus aléatoire

Nous supposons maintenant que la fonction à analyser est un processus stochastique $\{Y_t(\omega) : \omega \in \Omega\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ à valeur dans $\mathbb{R}$. Nous considérons alors que les exposants $s_{k_n}^{(n)}(\omega)$ sont des variables aléatoires sur l'espace $\Omega' = \Omega \times \{0, ..., 2^n - 1\}$ où Ω est l'espace du processus aléatoire dont $s_{k_n}^{(n)}(\omega)$ est l'étude.[2]

Dans ce cas, les spectres $\overline{f}(a)$, $\underline{f}(a)$ (2) et la fonction $\tau(q)$ (4) deviennent des variables aléatoires. Nous explicitons cette caractéristique par la présence de ω dans les définitions :

Proposition 2.0.3. *Si les variables $s_{k_n}^{(n)}(\omega)$sont i.i.d, alors $N^{(n)}(a, \epsilon)$ est une variable de Bernouilli défini sur l'espace $\{0, ..., 2^n\}$*

$N^{(n)}(a, \epsilon)$ compte le nombre d'exposants qui sont à une distance ϵ de a parmi $2^n - 1$ exposants, la probabilité qu'un exposant soit à une telle distance étant $p_m = \Pr(\{a - \epsilon \leq s_{k_n}^{(n)} < a + \epsilon\})$. $N^{(n)}(a, \epsilon)$ est donc une variable de Bernouilli :

$$\Pr(\{N^{(n)}(a, \epsilon) = j\}) = C_j^{2^n} p_n^j (1 - p_n)^{2^n - j}$$

Nous devons alors modifier les spectres et la fonction de partition :

- le spectre $\overline{f}(a)$ (2) devient $\overline{f}(a, \omega)$
- le spectre $\underline{f}(a)$ (2) devient $\underline{f}(a, \omega)$
- la fonction $\tau(q)$ (4) devient $\tau(q, \omega)$

2.1 Spectre de grain déterministe

Les deux spectres de grain déterministes de Y sont :

Définition 2.1.1.

$$\overline{F}(a) = \lim_{\epsilon \to 0} \limsup_{n \to \infty} \frac{\ln(\mathbb{E}_\Omega[N^{(n)}(a, \epsilon)])}{\ln(2^n)}$$

et

$$\underline{F}(a) = \lim_{\epsilon \to 0} \liminf_{n \to \infty} \frac{\ln(\mathbb{E}_\Omega[N^{(n)}(a, \epsilon)])}{\ln(2^n)}$$

La relation qui lie $\overline{f}(a, \omega)$ (2) et $\overline{F}(a)$ est celle-ci :

Proposition 2.1.1. $\forall a \in \mathbb{R}^+$, *nous avons presque sûrement :*

$$f(a, \omega) \leq \overline{F}(a)$$

De plus, si pour tout n, les variables aléatoires $\left\{s_{k_n}^{(n)}\right\}_{k_n \in \{0, ..., 2^n - 1\}}$ sont i.i.d, et si $\overline{F}(a) = \underline{F}(a)$, alors nous avons presque sûrement :

$$\underline{f}(a, \omega) = \overline{f}(a, \omega) = \overline{F}(a)$$

[2]On peut considérer que $s_k^{(n)}(\omega)$ est une suite de variable aléatoire sur $\{0, ..., 2^n - 1\} \times \Omega$

Démonstration. Pour la première égalité, il s'agit de la même preuve que pour l'inégalité dans le cas déterministe. Nous avons par définition $\underline{f}(a,\omega) \leq \overline{f}(a,\omega)$ et nous venons de voir que $\overline{f}(a,\omega) \leq \overline{F}(a)$. Il faut donc démontrer que $\overline{F}(a) \leq \underline{f}(a,\omega)$ pour avoir les égalités. L'égalité $\overline{F}(a) = \underline{F}(a)$ implique que la suite converge. Plus exactement,

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon / \forall n > N_\epsilon \quad \overline{F}(a) + \epsilon \geq \frac{\ln(2^n p_n)}{n \ln(2)} \geq \overline{F}(a) - \epsilon$$

i.e

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon / \forall n > N_\epsilon \quad 2^{n\overline{F}(a)+n\epsilon} \geq 2^n p_n \geq 2^{n\overline{F}(a)-n\epsilon}$$

Nous allons démontrer que l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tels que $\overline{f}(a,\omega) < \overline{F}(a)$ est nul. Cela signifie que

$$\overline{F}(a) > \lim_{\epsilon \to 0} \liminf_{n \to \infty} \frac{\ln(N^{(n)}(a,\epsilon))}{n \ln(2)}$$

$\forall \epsilon > 0, \exists \epsilon_1 > 0 / \forall \epsilon' < \epsilon_1$:

$$\overline{F}(a) > \liminf_{n \to \infty} \frac{\ln(N^{(n)}(a,\epsilon))}{n \ln(2)} + \epsilon'$$

En posant $v_n = \inf_n \left\{ \frac{\ln(N^{(k)}(a,\epsilon)}{k \ln(2)}, k \geq n \right\}$, l'expression devient :
$\forall \epsilon > 0, \exists \epsilon_1 > 0 / \forall \epsilon' < \epsilon_1, \exists N_{\epsilon'}, \forall n \in \mathbb{N} / (\exists k_n > n \text{ et } N_{\epsilon'})$

$$p_k 2^k \geq 2^{k\overline{F}(a)-k\epsilon'} > N^{(k)}(a,\epsilon')$$

Posons maintenant $\gamma < \overline{F}(a) - \epsilon', l = \lceil 2^{k\gamma} \rceil$. Alors $l - 1 < 2^{k\gamma} \leq l$. Puisque $N^{(n)}(a,\epsilon)$ a une densité binomiale qui est croissante de 0 à la moyenne, nous avons :

$$\Pr\left(\left\{\omega : N^{(k)}(a,\epsilon') \leq 2^{k\gamma}\right\}\right) \leq l C_l^{2^k} (p_k)^l (1-p_k)^{2^k - l}$$

Le terme de droite est le terme d'une série hypergéométrique qui converge. En utilisant le théorème de Borel Cantelli,

$$\Pr\left(\left\{\omega : N^{(k)}(a,\epsilon') \text{ pour une infinité de } n\right\}\right) = 0$$

Donc, à partir d'un certain rang, $\liminf_{n \to \infty} \frac{\ln(N^{(n)}(a,\epsilon'))}{n \ln(2)} \leq \gamma$. En faisant tendre ϵ' vers 0, on obtient $\underline{f}(a,\omega) \leq \gamma$. Puis en faisant tendre γ vers $\overline{F}(a)$, on a presque sûrement

$$\overline{F}(a) \leq \underline{f}(a,\omega)$$

et nous avons les chaînes d'égalités.

□

2.2 Fonction de partition déterministe

Définition 2.2.1. *La **fonction de partition déterministe** de Y est définie par :*

$$T(q) = \liminf_{n \to \infty} -\frac{\ln(\mathbb{E}_\Omega(S^{(n)}(q)))}{\ln(2^n)}$$

La relation qui lie $\tau(q,\omega)$ (4) et $T(q)$ est celle-ci :

Proposition 2.2.1. $\forall q \in \mathbb{R}$*, nous avons presque sûrement :*

$$\tau(q,\omega) \geq T(q)$$

$T(q)$ peut-être considéré comme une enveloppe déterministe inférieure de $\tau(q,\omega)$.

Démonstration. Cette proposition revient à dire qu'avec une probabilité de 0 on a : $\tau(q, \omega) < T(q)$ pour tout $q \in \mathbb{R}$. En utilisant le théorème de Borel-Cantelli pour démontrer que, pour tout ensemble dénombrable de q, on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Pr(A_n(q)) < \infty$$

On complète à R par compacité et continuité de τ et T et nous aurons alors le résultat recherché.
Nous posons :

$$A_\epsilon = \{\omega : \tau(q, \omega) + \epsilon < T(q)\}$$

Si $\omega \in A_\epsilon$

$$\Leftrightarrow -\liminf_{n\to\infty} \frac{\ln(S^{(n)}(q, \omega))}{n \ln(2)} < T(q) - \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \liminf_{n\to\infty} \frac{\ln(S^{(n)}(q, \omega))}{n \ln(2)} > -T(q) + \epsilon$$

or, comme la limite inférieure est croissante :

$$\Leftrightarrow \exists N / \forall n > N, \quad \inf_n \left\{ \frac{\ln(S^{(k)}(q, \omega))}{k \ln(2)}, k \leq n \right\} > \epsilon - T(q)$$

$$\Leftrightarrow \exists N / \forall n > N, \exists k \geq n, \quad S^{(k)}(q, \omega) > 2^{k\epsilon - kT(q)}$$

On pose $N' = \inf N_\omega$ pour pouvoir dire ensuite :

$$A_{\epsilon,q} = \{\omega : \tau(q, \omega) - \epsilon < T(q)\} = \bigcap_{n=N'}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} \left\{\omega : S^{(k)}(q, \omega) > 2^{k\epsilon - kT(q)}\right\}$$

Si on démontre que $A_{\epsilon,q}$ est de probabilité nulle grâce à Borel Cantelli alors en posant $A = \bigcup_{q \text{ ensemble dénombrable}} A_{q,\epsilon}$ est de mesure nulle. Comme c'est vrai pour tout ensemble dénombrable et que les deux fonctions sont continues, on peut étendre ce résultat à $\mathbb{R}$.

□

Nous avons l'équivalent de la proposition pour le cas déterministe :

Proposition 2.2.2. *$\forall a \in \mathbb{R}$,*

$$\overline{F}(a) \leq T^*(a)$$

Si $T(q) = \liminf_{n\to\infty} -\frac{\ln(E_\Omega(S^{(n)}(q)))}{\ln(2^n)}$ admet une limite finie lorsque n tend vers l'infini pour tout $q \in \mathbb{R}$, concave et différentiable en q, alors $\overline{F}(a)$ admet une limite lorsque n tend vers l'infini. Nous avons de plus :

$$\overline{F}(a) = \underline{F}(a) = T^*(a)$$

Nous avons le corollaire suivant, qui est très important pour l'analyse multifractale, et qui résume l'ensemble des résultats obtenus précédemment. Ce résultat permet de calculer numériquement le spectre multifractal d'un processus stochastique.

Proposition 2.2.3. *Supposons que $T(q)$ admet une limite finie lorsque n tend vers l'infini, pour tout q de $\mathbb{R}$, et que $T(q)$ soit concave et différentiable en q. Supposons de plus que les exposants aléatoires $\left\{s_{k_n}^{(n)}\right\}_{k_n \in \{0,\ldots,2^n-1\}}$ sont i.i.d. Alors si $T^*(a) > 0$ alors nous avons presque sûrement :*

$$\underline{f}(a, \omega) = \overline{f}(a, \omega) = \tau^*(a, \omega) = \overline{F}(a) = T^*(a)$$

3 Etudes de cas

3.1 1^{ere} étude de cas : l'ensemble de Cantor

3.1.1 La fonction de partition $\tau(q)$

Nous avons vu dans la note précédente que l'ensemble de Cantor possède qu'une seule singularité : $\frac{\ln(2)}{\ln(3)}$. Lorsque n tend vers l'infini, $N^{(n)}(a, \epsilon)$ devient équivalent à $c_n 2^n$. Les spectres de grain sont alors égaux à 1 pour $a = \frac{\ln(2)}{\ln(3)}$.
La fonction $\tau(q)(4)$ est égale à $\frac{\ln(2)}{\ln(3)}(q-1)$. Le graphique est représenté à la figure 1.

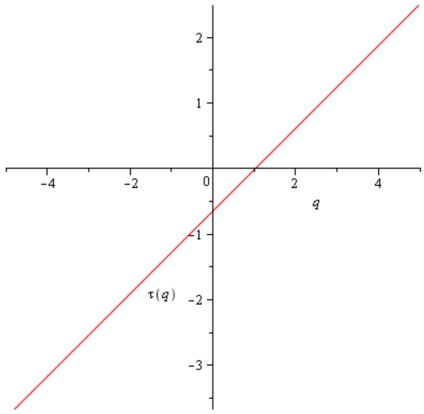

FIG. 1 – Graphique de la fonction $\tau(q)$

3.1.2 Les spectres de singularités

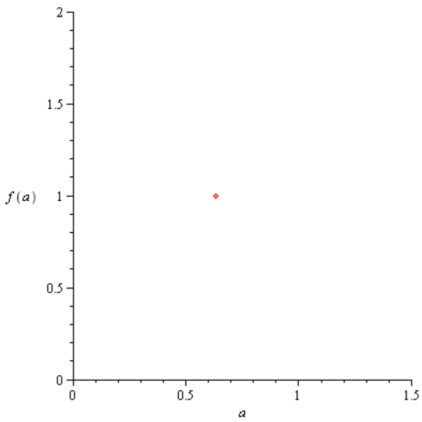

FIG. 2 – Spectre multifractal de l'ensemble de Cantor

Le spectre de singularités est réduit à un point. Il n'y a qu'un seul ensemble de singularités dans [0,1], et sa dimension est nécessairement égale à 1.

3.2 2^{eme} étude de cas : la mesure binomiale

3.2.1 La fonction de partition $\tau(q)$

Pour une cascade binomiale, la fonction de partition obtenue à partir du coefficient $\alpha_k^{(n)}$ et $h_k^{(n)}$ coïncident : Supposons que M est la fonction de répartition d'une mesure binomiale. Elle est presque sûrement croissante. Alors pour tout q

$$T_\alpha(q) = T_h(q)$$

et nous avons presque sûrement $\tau_\alpha(q,\omega) = \tau_h(q,\omega)$.

Nous pouvons calculer $S^{(n)}(q)$ qui est égale à $\sum_{k_n=0}^{2^n-1} \mu\left(I_{k_n}^{(n)}\right)^q$ car le processus étudié est une fonction de répartition.

$$S^{(n)}(q) = \sum_{k_n=0}^{2^n-1} \mu\left(M\left((k_n+1)2^{-n}\right) - M\left(k_n 2^{-n}\right)\right)^q$$

Or, dans la note précédente nous avons vu que

$$M\left((k_n+1)2^{-n}\right) - M\left(k_n 2^{-n}\right) = M_{k_n}^{(n)}.M_{k_{n-1}}^{(n-1)}...M_{k_1}^{(1)}.M_0$$

Donc

$$S^{(n)}(q) = M_0^q \sum_{i=0}^{2^n-1} C_i^n (M_0^q)^i (M_1^q)^{n-i} = M_0^q \left(M_0^q + M_1^q\right)^n$$

Nous pouvons alors calculer $\tau(q)$:

$$-\frac{\ln(S^{(n)}(q))}{\ln(2^n)} = -\frac{\ln(M_0^q)}{\ln(2^n)} - \frac{\ln((M_0^q+M_1^q)^n)}{\ln(2^n)}$$

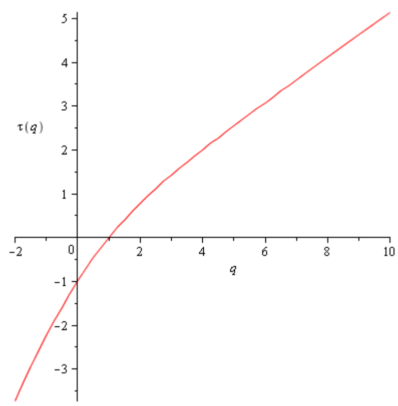

FIG. 3 – Graphique de la fonction τ avec $M_0 = 0.3$

$$\tau(q) = \liminf_{n\to} -\frac{\ln(S^{(n)}(q))}{\ln(2^n)} = -\log_2((M_0^q + M_1^q))$$

La graphique de la fonction $\tau(q)(4)$ qui correspond est celui de la figure 3.

3.2.2 Les spectres de singularités

Pour les mesures binomiales, nous avons les égalités suivantes :

$$\dim(K^a) = \dim(E^a) = \overline{f}(a) = \underline{f}(a) = \tau^*(a)$$

Nous disons alors que la mesure binomiale respecte le formalisme multifractal.
Dans le cas des mesures binomiales, nous pouvons calculer explicitement le spectre $\overline{f}$:

$$\overline{f}(a) = \frac{a}{\ln(M) - \ln(1-M)} \ln\left(-\frac{\ln(1-M) + a\ln(2)}{\ln(M) + a\ln(2)}\right) - \tau\left(\frac{1}{\ln(M) - \ln(1-M)} \ln\left(-\frac{\ln(1-M) + a\ln(2)}{\ln(M) + a\ln(2)}\right)\right)$$

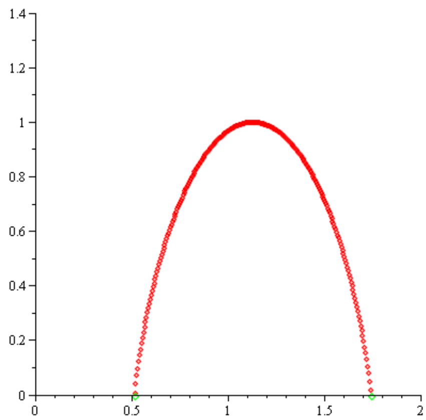

FIG. 4 – Graphique de la fonction $\overline{f}$ avec $M_0 = 0.3$

La courbe s'annule en $-\log_2(M) \approx 0.51$ et $-\log_2(1-M) \approx 1.736$. La singularité la plus fréquente dans la mesure binomiale est égale à la moitiè de $-\log_2(M)$ et de $-\log_2(1-M)$, approximativement égale à 1.12.