Analyse multifractale III

P.Gazzano, N.Lygeros

Nous avons introduit dans les notes précédentes divers spectres et mesures de singularités. Nous allons dans cette note regrouper toutes ces notions en formalisant les résultats obtenus de manière abstraite pour n'importe quel type de processus. Cette formalisation théorique s'appelle le **formalisme multifractal**.

1 Formalisme multifractal

1.1 Formalisme multifractal dans le cas déterministe

Nous avons les chaînes d'inégalités suivantes :

$$\dim(K^a) \leq \underline{f}(a) \leq \overline{f}(a) \leq \tau^*(a) \leq T^*(a)$$

et

$$\dim(E^a) \leq \overline{f}(a) \leq \overline{F}(a) \leq T^*(a)$$

Les quantités $\dim(E^a)$ et $\dim(K^a)$ sont exactes, alors que les quantités qui les majorent sont des approximations des quantités exactes. Nous avons alors deux approches, l'une est exacte et théorique, l'autre est approximative et appliquée qui se combinent pour former le formalisme multifractal. L'intérêt de l'analyse multifractale est d'approcher les dimensions de Hausdorff par des approximations plus faciles à calculer. On dit qu'un processus vérifie le formalisme multifractal si nous avons non seulement les inégalités ci-dessus, mais aussi les inégalités inverses pour donner les égalités suivantes :

$$\dim(K^a) = \underline{f}(a) = \overline{f}(a) = \tau^*(a) = T^*(a)$$

$$\dim(E^a) = \overline{f}(a) = \overline{F}(a) = T^*(a)$$

Le spectre multifractal à typiquement la forme d'une courbe en cloche, avec pour maximum la valeur 1 en une certaine singularité $\hat{a}$. Cela signifie que l'ensemble $E^{\hat{a}}$ sera dense dans $[0, 1]$, alors que les autres ensembles E^a auront une dimension de non entière et de mesure de Lebesgue nulle. Il n'est pas d'un grand intérêt d'obtenir les spectres de grain lorsque ceux-ci ne sont pas égaux aux spectres réels. Pour analyser un signal, nous devons avoir l'information précise quant aux dimensions de Hausdorff des ensembles de singularités. La formalisme multifractal permet de déterminer le cadre dans lequel nous aurons l'égalité. Nous ne pouvons malheureusement pas donner un cadre général dans lequel le formalisme est vérifié. En revanche, nous pouvons affirmer l'égalité entre les spectres $\tau^*(a), \overline{f}(a)$ et $\overline{F}(a)$ sous certaines hypothèses que nous allons voir dans cette note. Mais pour vérifier si le formalisme est (ou non) totalement respecter, il faut étudier au cas par cas en fonction du processus.

La proposition suivante permet de déterminer les cas d'égalités entre les spectres de grains et la fonction de partition, en fonction de la valeur des exposants de singularité.

Proposition 1.1.1. *Soit* $\left\{s_{k_n}^{(n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'exposants de singularités.*

– *Si les* $s_{k_n}^{(n)}$ *sont bornés, alors*

$$\forall q \in \mathbb{R} \quad \tau(q) = \overline{f}^*(q)$$

– *Si les* $s_{k_n}^{(n)}$ *sont seulement minorés,*

$$\tau(q) = \begin{cases} \forall q > 0 & \overline{f}^*(q) \\ \forall q < 0 & -\infty \end{cases}$$

– *Si les* $s_{k_n}^{(n)}$ *sont seulement majorés,*

$$\tau(q) = \begin{cases} \forall q > 0 & -\infty \\ \forall q < 0 & \overline{f}^*(q) \end{cases}$$

Démonstration. Nous avons déjà grâce à la proposition de la note II : $\forall q, \quad \tau(q) \leq f^*(q)$. Posons $k_n(a,\epsilon) = \{k : a - \epsilon \leq s_k^{(n)} < a + \epsilon\}$.

$$S^{(n)}(q) \leq \left(\sum_{i=-\lfloor a/\epsilon \rfloor}^{\lfloor a/\epsilon \rfloor} \sum_{k_n(i\epsilon,\epsilon)} + \sum_{|s_k^{(n)}|>a} \right) 2^{-nqs_k^{(n)}}$$

Soit $q \in \mathbb{R}$ et soit $\eta > 0$. Alors pour tout $a' \in [-a,a]$ s'il existe ϵ_a et n_a tel que $N^{(n)}(a,\epsilon) \leq 2^{n\overline{f}(a)+n\eta}$ pour tout $\epsilon < \epsilon_a$ et tout $n > n_a$. Pour démontrer les résultats de la proposition, il faut que ϵ et n soient indépendants de a.
En remarquant que $N^{(n)}(a',\epsilon') \leq N^{(n)}(a,\epsilon)$ pour tout $a' \in [a-\epsilon/2, a+\epsilon/2]$ et tout $\epsilon' < \epsilon/2$. Par compacité, on peut choisir un ensemble fini $a_j, (j = 1 \dots m)$ tel que la collection $[a_j - \epsilon_{a_j}/2, a_j + \epsilon_{a_j}/2]$ couvre $[-a,a]$.

Posons $\epsilon_1 = \min_{j=1\dots m} \epsilon_{a_j}/2$ et $n_1 = \max_{j=1\dots m}(n_{a_j})$.
Alors pour tout $\epsilon < \epsilon_1$ et $n > n_1$, nous avons :

$$N^{(n)}(a',\epsilon) \leq 2^{n\overline{f}(a')+n\eta}$$

pour tout $a' \in [-a,a]$. Pour tout $\epsilon < \epsilon_1$ et $n > n_1$ on estime le premier terme du deuxième membre de l'inégalité par :

$$\sum_{i=-\lfloor a/\epsilon \rfloor}^{\lfloor a/\epsilon \rfloor} \sum_{k_n(i\epsilon,\epsilon)} 2^{-nqs_k^{(n)}} \leq \sum_{i=-\lfloor a/\epsilon \rfloor}^{\lfloor a/\epsilon \rfloor} N^{(n)}(i\epsilon,\epsilon) 2^{-n(qi\epsilon-|q|\epsilon)} \leq \sum_{i=-\lfloor a/\epsilon \rfloor}^{\lfloor a/\epsilon \rfloor} 2^{-n(qi\epsilon - f(i\epsilon)-\eta-|q|\epsilon)}$$
$$\leq \left(2\lfloor a/\epsilon \rfloor + 1\right) 2^{-\eta(f^*(q)-\eta-|q|\epsilon)}$$

Cas 1°)
Supposons les coefficients $s_k^{(n)}$ sont bornés, alors en choisissant $\bar{a}$ supérieur à $|s_k^{(n)}|$ pour tout n et k, le second terme dans l'inégalité**??** s'annule et le dernier terme de l'inégalité ci-dessus majore $S^{(n)}(q)$. En faisant tendre $n \to \infty$, on trouve que $\tau(q) \geq f^*(q) - \eta - |q|\epsilon$ pour tout $\epsilon < \epsilon_1$. En faisant tendre ϵ vers 0, et η vers 0, on trouve $\tau(q) \geq f(q)$.

Cas 2°)
Si les $s_k^{(n)}$ sont minorés, alors si $q > 0$, en choisissant $\bar{a}$ suffisamment grand pour s'assurer que $q\bar{a} > f^*(q)+1$ et que $s_k^{(n)} > -\bar{a}$ pour tout k et n, le second terme dans l'inégalité**??** est borné par

$$\sum_{s_k^{(n)}>\bar{a}} 2^{-nqs_k^{(n)}} \leq 2^n 2^{-nq\bar{a}} \leq 2^{-nf^*(q)}$$

Cette quantité est certainement plus petite que le membre de droite de l'inégalité **??** et dans ce cas $S^{(n)}(q)$ est minoré par

$$(2\lfloor a/\epsilon \rfloor + 1)\, 2^{-\eta(f^*(q)-\eta-|q|\epsilon)}$$

et le résultat suit comme dans le cas précédent.
Si $q < 0$, alors pour tout x, on peut trouver un n arbitrairement large tel que $s_k^{(n)} > x$ pour certains k. Ceci implique que $S^{(n)}(q) \geq 2^{-nqx}$, et $\tau(q) \leq qx$. Lorsque x tend vers l'infini, $\tau(q) = -\infty$ car q est négatif.
Cas 3°) et 4°) Il s'agit de la même démarche que dans les deux cas précédents.

□

La fonction τ est toujours concave sur $\mathbb{R}$. Selon le cas de la proposition précédente τ est continue sur $\mathbb{R}$, $\{q > 0\}$ ou $\{q < 0\}$. De plus, τ est différentiable sur ces trois ensembles. Si à partir d'un certain rang n, les termes de la suite $\left\{s_{k_n}^{(n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ sont positifs, alors τ est croissant. C'est le cas pour $s_{k_n}^{(n)} = h_{k_n}^{(n)}$ et $s_{k_n}^{(n)} = \alpha_{k_n}^{(n)}$ si le processus est croissant.

D'un point de vue numérique τ est plus robuste que $\overline{f}$ puisque τ fait intervenir des moyennes, et n'est pas une double limite. Il serait donc intéressant de pouvoir exprimer dans le théorème précédent $\overline{f}^*(q)$ en fonction de $\tau(q)$. Plus précisément, il nous faudrait exprimer $\overline{f}(a)$ en fonction de $\tau^*(a)$. C'est ce que nous montre le théorème suivant.

Proposition 1.1.2. *D'une manière générale, nous avons toujours :*

$$\overline{f}(a) \leq \overline{f}^{**}(a) = \tau^*(a)$$

Mais pour tous $q \in \mathbb{R}$ pour lequel $\tau'(q)$ existe, nous avons :

$$\overline{f}(a) = \tau^*(a) = q\tau'(q) - \tau(q) \text{ au point } a = \tau'(q)$$

Démonstration. Le graphe de f^{**} est l'enveloppe convexe du graphe de f, ce qui implique la première inégalité.
Supposons que τ soit dérivable en un point q^*. Puisque $\tau(q^*) = f^*(q^*)$, on peut trouver une suite a_m telle que $\tau(q^*) = \lim\limits_{m\to\infty} q^*a_m - f(a_m)$. Maintenant considérons la fonction $q \to qa_m - f(a_m)$. Elle est supérieure en tout point à τ. Mais en q^*, ces fonctions convergent vers $\tau(q^*)$. Etant linéaires, leurs coefficients doit tendre vers le coefficient de la tangente en q^*. En d'autres termes, elles convergent vers $a^* = \tau'(q^*)$.
On en déduit que $f(a_m)$ converge vers $q^*a^* - \tau(q^*)$. Par semi-continuité inférieure, on a $f(a^*) \geq \lim_{m\to} f(a_m) = q^*a^* - \tau(q^*)$. Comme on a nécessairement $f(a^*) \leq q^*a^* - \tau(q^*)$, on en déduit l'égalité.

□

Par convention $S^{(n)}(0)$ compte le nombre de $s_{k_n}^{(n)}$ qui sont finis. Donc $S^{(n)}(0) \geq 0$ et on a toujours :

$$\tau(0) \leq 0$$

De plus, $S^{(n)}(0) \geq N^{(n)}(a, \epsilon)$ pour tout a, ce qui implique $\overline{f}(a) \leq -\tau(q)$. On à l'égalité lorsque $a = \tau'(0)$.
Si tous les $s_{k_n}^{(n)}$ sont finis, alors :

$$\tau(0) = -1$$

Lorsque $s_{k_n}^{(n)} = h_{k_n}^{(n)}$, les exposants de singularité sont monotones, c'est-à-dire $2^{-ns_{k_n}^{(n)}} \geq \max(2^{-ns_{2k_{n+1}}^{(n+1)}}, 2^{-ns_{2k_{n+1}+1}^{(n+1)}})$.
Dans ce cas, $S^{(n)}(1) \geq 2S^{(n+1)}(1)$ et :

$$\tau(1) \geq -1$$

Nous venons donc de trouver une condition pour laquelle le formalisme est vérifié :

Pour l'ensemble des $a = \tau'(q)$ où τ est dérivable, nous aurons :

$$\dim(K^a) \leq \underline{f}(a) \leq \overline{f}(a) = \tau^*(a)$$

Sous réserve que $\overline{f}(a) = \underline{f}(a)$ (ce qui est le souvent le cas), nous aurons au mieux :

$$\dim(K^a) \leq \underline{f}(a) = \overline{f}(a) = \tau^*(a)$$

1.2 Formalisme multifractal dans le cas aléatoire

Dans le cas aléatoire, nous avons les théorèmes équivalents au cas déterministe. Nous avons le formalisme suivant :

Proposition 1.2.1. *Si $T(q)$ est fini pour certaines valeurs de $q > 0$, alors les valeurs de la suite $s_{k_n}^{(n)}$ sont minorées presque sûrement. De plus, pour tout $q > 0$ avec $T(q)$ fini, nous avons $T(q) = F^*(q)$.*

Si $T(q)$ est fini pour certaines valeurs de $q < 0$, alors les valeurs de la suite $s_{k_n}^{(n)}$ sont majorées presque sûrement. De plus, pour tout $q < 0$ avec $T(q)$ fini, nous avons $T(q) = F^*(q)$.

De plus, pour toutes les valeurs de q pour lesquelles $T'(q)$ existe

$$F(a) = T^*(a) = qT'(q) - T(q)$$

au point $a = T'(q)$.

De la même manière que dans le paragraphe précédent, le formalisme est vérifié sur les ensembles de points a pour lesquels $a = T'(q)$ est dérivable, où nous avons :

$$\dim(E^a) \leq \underline{f}(a,\omega) \leq \overline{f}(a,\omega) \leq \overline{F}(a) = T^*(a)$$

Enfin, nous avons vu dans la note précédente que si les variables aléatoires $s_k^{(n)}$ sont i.i.d et si $\overline{F}(a) > 0$, alors :

$$\overline{f}(a,\omega) = \overline{F}(a)$$

presque sûrement, et nous aurons :

$$\dim(E^a) \leq \underline{f}(a,\omega) = \overline{f}(a) \leq \overline{F}(a) = T^*(a)$$

2 L'apport du formalisme multifractal

L'approche multifractale a été initiée avec les modèles de cascades multiplicatives de B.Mandelbrot pour la dissipation de l'énergie dans le contexte de la turbulence pleinement développée. Elle s'est développée ensuite à partir de l'étude de mesures de vitesses d'écoulement turbulent dans les années 80. Le calcul direct du spectre de singularités pour des signaux réels s'avère difficile à mener numériquement étant donné le nombre infini de dimensions à calculer. Une formulation, appelée **formalisme multifractal** a été alors mise au point par Parisi et Frisch[1] avec l'objectif de déterminer ce spectre par des calculs numériques.

Le formalisme multifractal nous montre l'existence d'un lien fort entre d'une part le comportement de la somme des accroissements à une puissance p d'un processus lorsque le pas des accroissements tend vers zéro, et d'autre part le fait que ce processus exhibe diverses régularités locales sur des ensembles de points de dimensions non entières. Ce lien est réalisé par le principe des grandes déviations qui associe au spectre de grain $\overline{f}(a)$, issu de l'approche discrète, la quantité $\tau^*(a)$, transformée de Legendre de la fonction de partition $\tau(q)$.

[1]Cf Parisi G. and U. Frisch, 1985. A multifractal model of intermittency. In : Turbulence and predictability in geophysical fluid dynamics and climate dynamics.