

# Analyse multifractale IV

P.Gazzano, N.Lygeros

Nous étudions dans cette note une application de l'analyse multifractale à des processus particuliers : les processus stables. Nous rappelons d'abord quelques propriétés des processus stables, puis nous ferons l'analyse multifractale de ces processus.

## 1 Les processus H-sssi, les processus stables

### 1.1 Les processus H-sssi

Soit  $\{Y(t)\}_{t \in \mathbb{R}^+}$  un processus stochastique. Nous rappelons les définitions suivantes :

**Définition 1.1.1.** *Un processus  $Y$  est **auto-similaire** d'indice  $H$  si et seulement si pour tout  $a > 0$ , nous avons :*

$$Y(at) \stackrel{d}{=} a^H Y(t)$$

*Un processus  $Y$  est **stationnaire** si*

$$Y(t+s) - Y(t) \stackrel{d}{=} Y(s) - Y(0)$$

Un processus  $Y$  qui vérifie ces deux propriétés est dit « H-sssi » (self-similar, stationary increments). Une conséquence immédiate de ces propriétés est qu'un processus H-sssi est centré autour de 0.

### 1.2 Les processus $\alpha$ -stables

Lorsque l'on suppose que la variance d'un processus H-sssi peut-être infinie, nous définissons une nouvelle classe de processus qui généralise la classe précédente, et que l'on appelle «  $\alpha$ -stable ».

Une variable aléatoire  $\alpha$ -stable  $Y$  est définie par sa fonction caractéristique, car il n'existe pas d'expression explicite de la fonction de distribution.

**Définition 1.2.1.** *Un processus  $\alpha$ -stable est un processus dont la fonction caractéristique est :*

$$E(\exp(i\theta Y)) = \exp(-\sigma^\alpha |\theta|^\alpha + i\mu\theta)$$

Si  $Y$  et  $Y'$  sont deux variables  $\alpha$ -stable, alors  $Y + Y'$  sera  $\alpha$ -stable.

## 2 Analyse multifractale

### 2.1 Etude des exposants

Les propriétés des processus H-sssi permettent de calculer facilement l'expression des exposants de singularité, puisque les propriétés d'auto-similarité se répercutent dans les exposants. L'exposant  $\alpha$  qui a été défini comme un exposant de mesure dans la première note est une variable aléatoire. Nous avons en effet pour  $k \in \{0 \dots 2^n - 1\}$

$$2^{-n\alpha_k^{(n)}} = |V((k+1)2^{-n}) - V(k2^{-n})| \stackrel{d}{=} |V(2^{-n})| \stackrel{d}{=} 2^{-nH} |V(1)| = 2^{-nH} 2^{-\alpha_0^{(0)}}$$

Nous en déduisons donc que :  $\alpha_k^{(n)} \stackrel{d}{=} H + (1/n)\alpha_0^{(0)}$ . Nous avons le même résultat pour les autres exposants de singularité :

**Proposition 2.1.1.** Pour un processus  $H$ -sssi, les exposants de singularité  $\alpha_k^{(n)}$ ,  $h_k^{(n)}$  et  $w_k^{(n)}$  vérifient la loi d'autosimilarité suivante :  $s_k^{(n)} \doteq H + (1/n)s_0^{(0)}$

De plus,  $E \left[ 2^{-qs_0^{(0)}} \right]$  est fini si  $q \in [\underline{q}, \bar{q}]$ .

Les bornes prennent des valeurs différentes selon les exposants et les processus :

- pour  $\alpha_k^{(n)}$  et  $w_k^{(n)}$  :
  - pour un processus  $H$ -sssi :  $\underline{q} = -1, \bar{q} = \infty$
  - pour un processus  $\alpha$ -stable :  $\underline{q} = -1, \bar{q} = \alpha$
- pour  $h_k^{(n)}$  :
  - pour un processus  $H$ -sssi :  $\underline{q} = -\infty, \bar{q} = \infty$
  - pour un processus  $\alpha$ -stable :  $\underline{q} = -\infty, \bar{q} \leq \alpha$

## 2.2 Etude des spectres déterministes $T_s(q)$ , $\bar{F}(a)$ et $T_s^*(a)$

### 2.2.1 Etude de $T_s(q)$

Nous étudions d'abord  $T_s(q)$  :

**Proposition 2.2.1.**  $T_s(q)$  est égale à :

$$\text{Si } q \in [\underline{q}, \bar{q}], \quad T_s(q) = qH - 1, \quad -\infty \text{ sinon}$$

*Démonstration.*

$$E \left[ S^{(n)}(q, \omega) \right] = \sum_{k=0}^{2^n - 1} 2^{-nqs_k^{(n)}} = 2^n 2^{-nq} E \left[ 2^{-qs_0^{(0)}} \right]$$

Donc en passant aux logarithmes :

$$-\frac{\log_2 \left( E \left[ S^{(n)}(q, \omega) \right] \right)}{n} = -1 + Hq - \frac{E \left[ 2^{-qs_0^{(0)}} \right]}{n}$$

$T_s(q)$  étant égale à  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2 \left( E \left[ S^{(n)}(q, \omega) \right] \right)}{n}$  nous avons :

$$\text{Si } q \in [\underline{q}, \bar{q}], \quad T_s(q) = qH - 1, \quad -\infty \text{ sinon}$$

□

### 2.2.2 Etude de $\bar{F}_s(a)$

Nous étudions maintenant  $\bar{F}_s(a) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2 \left( E \left[ N^{(n)}(a, \epsilon) \right] \right)}{n}$  :

**Proposition 2.2.2.** si  $a > H$

$$\bar{F}_s(a) = (a - H)\bar{q}$$

si  $a = H$

$$\bar{F}_s(a) = 0$$

si  $a < H$

$$\bar{F}_s(a) = (a - H)\underline{q}$$

*Démonstration.* Dans la précédente note, nous avons vu que

$$N^{(n)}(a, \epsilon) = \Pr \left\{ |s_k^{(n)} - a| < \epsilon \right\} = \Pr \left\{ n(a - H - \epsilon) < s_0^{(0)} < n(a - H + \epsilon) \right\}$$

Nous appelons  $\Phi_s$  la fonction de densité de la variable aléatoire  $2^{-s_0^{(0)}}$ . Nous avons donc :

$$N^{(n)}(a, \epsilon) = \int_{2^{-n(a-H-\epsilon)}}^{2^{-n(a-H+\epsilon)}} \Phi_s(x) dx$$

D'après l'égalité des accroissements finis, il existe  $x_{a,n} \in [a - \epsilon, a + \epsilon]$  tel que :

$$\Psi(2^{-n(a-H+\epsilon)}) - \Psi(2^{-n(a-H-\epsilon)}) = 2^{n(a-H-\epsilon)}(1 - 2^{-2n\epsilon})\Phi(2^{-n(x_{a,n}-H)})$$

Donc :

$$N^{(n)}(a, \epsilon) = 2^{n(a-H-\epsilon)}(1 - 2^{-2n\epsilon})\Phi(2^{-n(x_{a,n}-H)})$$

En composant par le logarithme :  $\frac{\log_2(E[N^{(n)}(a, \epsilon)])}{n} = a - H - \epsilon + \frac{\log_2(1 - 2^{-2n\epsilon})}{n} + \frac{\log_2(\Phi_s(2^{-n(x_{a,n}-H)}))}{n}$

$\Phi_s(x)$  se comporte comme  $x^{-\underline{q}-1}$  en 0 et se comporte comme  $x^{-\bar{q}-1}$  en l'infini.

Si  $a + \epsilon < H$ , alors  $x_{a,n} < H$ . Donc  $-n(x_{a,n} - H) > 0$  pour tout  $n$ . Lorsque  $n$  tend vers l'infini,

$$\Phi_s(2^{-n(x_{a,n}-H)}) \approx (2^{-n(x_{a,n}-H)})^{-\bar{q}-1} = 2^{-n(x_{a,n}-H)(-\bar{q}-1)}$$

Donc :

$$2^{n(a-H-\epsilon)}(1 - 2^{-2n\epsilon})\Phi_s(2^{-n(x_{a,n}-H)}) \approx 2^{n(a-H-\epsilon)}(1 - 2^{-2n\epsilon})2^{-n(x_{a,n}-H)(-\bar{q}-1)}$$

Donc :

$$\frac{\log_2(E[N^{(n)}(a, \epsilon)])}{n} \approx -a + H + \epsilon + (x_{a,n} - H)(\bar{q} + 1) + \frac{\log_2(1 - 2^{-2n\epsilon})}{n}$$

Puisque  $x_{n,\epsilon} \in [a - \epsilon, a + \epsilon]$ , on a :  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} x_{a,n} = a$ .

Donc :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2(E[N^{(n)}(a, \epsilon)])}{n} = (a - H)\bar{q} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2(1 - 2^{-2n\epsilon})}{n}$$

or,  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2(1 - 2^{-2n\epsilon})}{n} = 0$

donc si  $a > H - \epsilon$ ,

$$\overline{F}_s(a) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2(E[N^{(n)}(a, \epsilon)])}{n} = (a - H)\bar{q}$$

Nous démontrons de même que si  $a < H - \epsilon$

$$\overline{F}_s(a) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2(E[N^{(n)}(a, \epsilon)])}{n} = (a - H)\underline{q}$$

Enfin, lorsque  $a = H$ , nous avons par recollement :

$$\overline{F}_s(a) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2(E[N^{(n)}(a, \epsilon)])}{n} = 0$$

Nous avons aussi

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2(E[N^{(n)}(a, \epsilon)])}{n} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2(E[N^{(n)}(a, \epsilon)])}{n}$$

Donc :

$$\underline{F}(a) = \overline{F}(a)$$

□

### 2.2.3 Etude de $T_s^*(a)$

Nous étudions enfin  $T_s^*(a)$  :

**Proposition 2.2.3.** *Pour tout  $a$ ,  $T_s^*(a)$  est égal à :*

- si  $a > H$ ,  $T_s^*(a) = 1 + \underline{q}(a - H)$
- si  $a < H$ ,  $T_s^*(a) = 1 + \overline{q}(a - H)$
- et si  $a = H$ ,  $T_s^*(a) = 1$

*Démonstration.* Par définition :

$$T_s^*(a) = \inf_{q \in [\underline{q}, \overline{q}]} (qa - T_s(q))$$

Or, nous avons vu précédemment que  $T_s(q) = qH - 1$

Donc

- si  $a > H$ ,  $T_s^*(a) = 1 + \underline{q}(a - H)$
- si  $a < H$ ,  $T_s^*(a) = 1 + \overline{q}(a - H)$
- et si  $a = H$ ,  $T_s^*(a) = 1$

Pour les exposants du type  $w$  et  $\alpha$ , nous avons :

$$F_\alpha = F_w = T_\alpha^* = T_w^*$$

Pour les exposants du type  $h$ , nous avons :

$$F_h = T_h^*$$

□

## 2.3 Etude de la fonction de partition $\tau(\omega, q)$ et $\tau^*(\omega, a)$

Grâce à la linéarité de  $T(q)$  pour un processus H-sssi, nous pouvons calculer  $\tau(\omega, q)$  lorsque nous supposons que  $T(q)$  est fini.  $S^{(n)}(0, \omega)$  compte le nombre d'incrémentes à l'échelle  $n$ , qui ne sont pas égaux à l'infini. Pour un processus H-sssi,  $S^{(n)}(0, \omega)$  est égale à  $2^n$  presque sûrement. Donc  $\tau(0) = -1$ . Nous avons aussi  $T(0) = -1$ . Nous savons de plus que  $\tau(\omega, q)$  est concave et majore  $T(q)$  (cf note précédente). Ceci implique que  $\tau(q)$  est nécessairement linéaire. Nous avons :

**Proposition 2.3.1.** *Si  $\underline{q} < 0 < \overline{q}$ , alors avec une probabilité de un,*

$$\tau(q, \omega) = qH - 1, \text{ pour tout } \underline{q} < q < \overline{q}$$

## 2.4 Conclusion

Nous avons étudié le formalisme multifractal pour un processus H-sssi. Les résultats sont récapitulés ci-après :

Pour  $T_s(q)$  :

$$qH - 1 \text{ si } q \in ]\underline{q}, \overline{q}[$$

Pour  $\overline{F}_s(a)$  :

$$(a - H)\overline{q} \text{ si } a > H$$

$$(a - H)\underline{q} \text{ si } a < H$$

$$0 \text{ si } a = H$$

Pour  $T_s^*(a)$  :

$$1 + \underline{q}(a - H) \text{ si } a > H$$

$$1 + \bar{q}(a - H) \text{ si } a < H$$

$$1 \text{ si } a = H$$

Pour  $\tau(q, \omega)$  :

$$qH - 1 \text{ si } \underline{q} < q < \bar{q}$$

## 2.5 Etude des spectres multifractals $\dim_H(E_s^a)$

Pour les mouvements browniens fractionnaires de coefficients  $H$ , nous avons vu dans la première note que ces processus n'ont qu'un seul exposant de singularité :

$$h_t = H, \quad \forall t \in [0, 1]$$

Nous avons donc, presque sûrement, l'égalité entre les différents spectres :

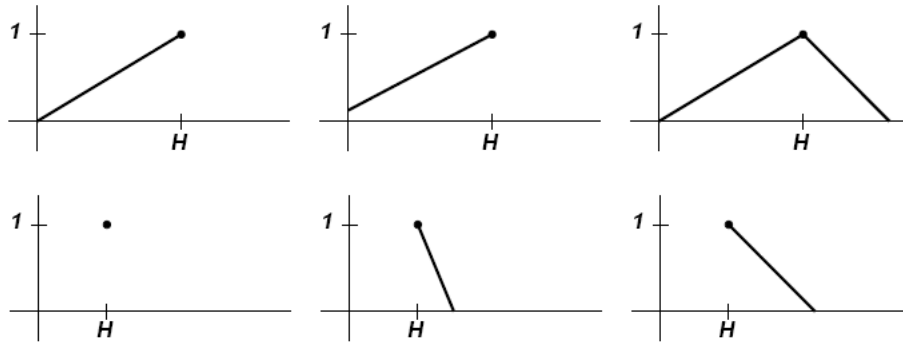
$$\dim(E_h^a) = \overline{f}_h(a) = \tau_h^*(a) = T_h^*(a) = 1 \text{ si } a = H$$

$$\dim(E_h^a) = \overline{f}_h(a) = \tau_h^*(a) = T_h^*(a) = -\infty \text{ si } a < H$$

Pour un processus  $\alpha$ -stable<sup>1</sup>, nous avons :

$$\dim(E_h^a) = a/H \quad \text{si } 0 < a < H, \quad -\infty \text{ sinon}$$

Les figures ci-dessous représentent pour les processus  $\alpha$ -stables, puis pour les processus browniens fractionnaires les spectres  $\dim(E_h^a)$ ,  $T_h^*(a)$  et  $T_\alpha^*(a) = T_w^*(a)$



En conclusion, le formalisme multifractal est parfaitement vérifié pour les processus H-sssi et les processus stables si on considère le coefficient d'exposant  $h$ .

<sup>1</sup>cf Jaffard : Multifractal formalism for functions partII