Ανάλυση της συμβολής του Καραθεοδωρή στη Θεωρία
της Γενικής Σχετικότητας του Einstein
Νίκος Λυγερός

Το 1899, ο Poincaré υποστήριξε ότι η απόλυτη ομαλή κίνηση είναι θεμελιωδώς μη ανιχνεύσιμη με οποιονδήποτε τρόπο. Το 1900, ο Larmov υπέδειξε ότι τα κινούμενα ρολόγια πρέπει να πηγαίνουν αργά. Το 1903, ο Lorentz δημοσίευσε την τελική μορφή του μετασχηματισμού του. Το 1904 ο Poincaré σκέφτηκε ότι πρέπει να υπάρχει μία δυναμική, όπου η ταχύτητα φωτός είναι όριο. Και το 1905, ο Einstein συνέθεσε την Ειδική Σχετικοτητα. Η δημιουργία του βασίζεται σε εργαλεία και δομές που υπήρχαν και τα οποία μετέτρεψε σε θεμέλια για τη θεωρία του. Στη συνέχεια, ο Minkowski ερμήνευσε το διάγραμμά του ως ένα τετρα- διάστατο χώρο. Όμως δίχως τον τανυστικό λογισμό του Levi-Civita και τα εντατικά μαθήματα του Grossmann δεν θα υπήρχε η αλλαγή φάσης που δημιούργησε τη Γενική Σχετικότητα το 1914. Η θεμελίωση της θεωρίας είχε γίνει όταν ο Schwarzschild βρήκε το 1916 τη λύση του των εξισώσεων του Einstein. Με άλλα λόγια, εκείνη την εποχή η εξέλιξη της θεωρίας είχε φτάσει στο επίπεδο των προβλημάτων όταν ο Einstein έκανε την πρώτη επαφή με τον Carathéodory. Για να κατανοήσουμε, με απλό τρόπο, την συμβολή του τελευταίου στη θεωρία της Γενική Σχετικότητας είναι απαραίτητη η πρόσβαση σε μερικά θεμελιακά εργαλεία της Διαφορικής Γεωμετρίας.

Έστω μία διανυσματική μετατόπιση:
$d\vec{r} = ad\vec{u} + bd\vec{v}$
Το βαθμωτό γινόμενο δύο τέτοιων διανυσμάτων $d\vec{r}_1$ και $d\vec{r}_2$ είναι:

$$d\vec{r}_1.d\vec{r}_2 = (ad\vec{u}_1 + bd\vec{v}_1)(ad\vec{u}_2 + bd\vec{v}_2) = \begin{bmatrix} du_1 & dv_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^2 & \vec{a}.\vec{b} \\ \vec{a}.\vec{b} & b^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du_2 \\ dv_2 \end{bmatrix}$$

Άρα, αν θέσουμε:
$guu = a^2, guv = gvu = \vec{a}.\vec{b}$ και $gvv = b^2$
έχουμε:

$$d\vec{r}_1.d\vec{r}_2 = \begin{bmatrix} du_1 \ dv_1 \end{bmatrix} \vec{g} \begin{bmatrix} du_2 \\ dv_2 \end{bmatrix}$$

Όπου $\vec{g}$ είναι ο μετρικός τανυστής.
Σε καμπυλόγραμμες συντεταγμένες, είναι πιο εύκολο να ορίσουμε το εφαπτόμενο διάνυσμα, για να διατηρήσουμε τις ιδιότητες που θέλουμε. Μια απλώς εφαρμογή στην επιφάνεια μιας σφαίρας δίνει το εξής αποτέλεσμα:
$ds^2 = (Rd\theta)^2 + (R\sin\theta d\varphi)^2 = R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2\theta d\varphi^2$
Όπου $g\theta\theta = R^2, \qquad g\theta\varphi = g\varphi\theta = 0 \quad g\varphi\varphi = R^2 \sin^2\theta$
Η γενική διατύπωση σε n διαστάσεις γράφεται ως εξής για τη μετρική:

$$ds^2 = \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1} g\mu\nu dx^\mu dx^\nu$$

Και με τη σύμβαση του Einstein έχουμε:

$ds^2 = g\mu\nu dx^\mu dx^\nu$

Με ανάλογο συμβολισμό, το βαθμωτό διάνυσμα γράφεται: $\vec{A}\vec{B} = g\mu\nu A^\mu B^\nu$

Το ιδανικό πλαίσιο των τανυστών προέρχεται από την ιδιότητα του αναλλοίωτου σε σχέση με την αλλαγή συντεταγμένων. Ένα απλό παράδειγμα είναι το επίπεδο με τις καρτεσιανές και πολικές συντεταγμένες.

$ds^2 = dx^2 + dy^2$ με $x = r\cos\theta$ και $y = r\sin\theta$

Έχουμε τα διαφορικά:

$dx = dr\cos\theta - rd\theta\sin\theta$ και $dy = dr\sin\theta + rd\theta\cos\theta$

Άρα: $ds^2 = dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$

Κατά συνέπεια: $\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dr \\ d\theta \end{bmatrix}$

Και τελικά: $\begin{bmatrix} A^x \\ A^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^r \\ A^\theta \end{bmatrix}$

Ας εξετάσουμε τώρα τον φορμαλισμό του Lagrange και τη μορφή του Euler για τις γεωδαισιακές εξισώσεις:

$$\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}^\mu}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0 \text{ με } \mu = 1, 2..., n$$

Στη Γενική Σχετικότητα η L έχει πρόσημο. Είναι χρονοειδής

Αν $(L > 0)$ μηδενική αν L=0 και χωροειδής αν L<0.

Σε ειδικά προβλήματα, όπου ο χωροχρόνος έχει κάποια συμμετρία, η εξίσωση Euler απλοποιείται με τις ανεξάρτητες συντεταγμένες

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{u}}\right) = 0$$

Ενώ με το φορμαλισμό του Hamilton έχουμε π.χ για την ορμή.

$$p_\alpha = \frac{1}{2}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} = g_{\alpha\beta}\dot{x}^\beta \text{ δηλαδή } \dot{x}^\beta = g^{\alpha\beta} p_\alpha$$

Η εξίσωση Euler γράφεται: $\dot{p}\mu = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu}$

Αν ορίσουμε: $H(x, p) = \dfrac{1}{2} g^{\mu\nu} p\mu p\nu$ τότε έχουμε:

$$\dot{x}^\mu = \frac{\partial H}{\partial p\mu} \; \textit{και} \; \dot{p}\mu = -\frac{\partial H}{\partial x^\mu}$$

Ο Eintein γνώριζε τον πρώτο φορμαλισμό, ενώ ο Carathéodory του έμαθε πώς λειτουργεί ο δεύτερος.

Αναφορές:

- Αλληλογραφία Carathéodory – Einstein [1916-1930]
- P. Bergmann: Introduction to the Theory of Relativity. 1942.
- D. Griffiths: Introduction to Electrodynamics. 1989.
- J. Martin: General Relativity. A first course for physicists. 1996.
- B. Schutz: A first Course in General Relativity. 1985.