Από την περιστροφή της διανυσματικής ανάλυσης στους τανυστές δευτέρου βαθμού της Γενικής Σχετικότητας

Νίκος Λυγερός

Η περιστροφή $(\nabla \times V)$ της διανυσματικής ανάλυσης παρουσιάζεται ως ένα διάνυσμα. Και βέβαια το ίδιο ισχύει και για το εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων, το οποίο κάνει χρήση ο ορισμός της περιστροφής. Πιο αναλυτικά έχουμε, όσον αφορά το μέτρο του διανύσματος.

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.\sin(\vec{a}.\vec{b})$$

Το διάνυσμα είναι, εξ ορισμού, κάθετο στο επίπεδο που δημιουργούν τα δύο διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$. Μόνο που υπάρχουν δύο διανύσματα που έχουν αυτές τις ιδιότητες. Κατά συνέπεια, πρέπει να γίνει μια επιλογή μέσω της έννοιας της φοράς. Κι εδώ εφαρμόζεται ο κανόνας του δεξιόστροφου συστήματος συντεταγμένων. Αυτό σημαίνει όμως ότι το εξωτερικό γινόμενο δεν ορίζεται με ενδογενή τρόπο καθώς γίνεται με το εσωτερικό γινόμενο, αν βέβαια θεωρούμε ως δεδομένη τη μετρική. Έτσι η αλλαγή των συστημάτων συντεταγμένων, αλλάζει τη φορά του διανύσματος που παράγει το εξωτερικό γινόμενο. Με άλλα λόγια το εξωτερικό γινόμενο δεν αποτελεί αναλλοίωτο και αυτό το πράγμα μεταφέρεται και στην περιστροφή. Οι δύο αυτές περιπτώσεις αποτελούν παραδείγματα μη κλασσικών διανυσμάτων, τα οποία ονομάζουμε αξονικά διανύσματα. Ας εξετάσουμε δύο διανύσματα τριών διαστάσεων. Για το εξωτερικό γινόμενο έχουμε:

$$P_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2$$
$$P_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3$$
$$P_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

Και για την περιστροφή έχουμε:

$$C_1 = V_{3,2} - V_{2,3}$$
$$C_2 = V_{1,3} - V_{3,1}$$
$$C_3 = V_{2,1} - V_{1,2}$$

Μέσω του τανυστικού λογισμού, τον οποίο χρησιμοποιούμε στη Γενική Σχετικότητα, έχουμε τη δυνατότητα να γράφουμε αυτά τα αξονικά διανύσματα ως τανυστές δευτέρου βαθμού. Για να το πετύχουμε αυτό γράφουμε τα δεδομένα μ' έναν συναλλοίωτο τρόπο.

Για το εξωτερικό γινόμενο έχουμε : $P_{ik} = a_i b_k - a_k b_i$

Για την περιστροφή έχουμε: $C_{ik} = V_{k,i} - V_{i,k}$

Η διαχείριση του προβλήματος δεν εμφανίζει την εσωτερική δομή. Όμως αν εισαγάγουμε την έννοια του τανυστή πυκνότητας, τότε η αναλογία είναι πιο ξεκάθαρη. Όταν η ορίζουσα είναι +1 και δεν υπάρχουν αντικατοπτρισμοί τότε ο τανυστής πυκνότητας είναι τανυστής. Ο μετασχηματισμός του έχει ως εξής:

$$T_{mn}\mathrm{K} = c_{mi}c_{nk}\mathrm{K}\left|c_{ab}\right|T_{ik}$$

Με αυτόν τον τρόπο διατηρείται η αναλογία με τα αξονικά διανύσματα. Και οι κανόνες του λογισμού των τανυστών πυκνότητας είναι:

$$\mathrm{P}_{mn} + \mathrm{P}_{mn} = \mathrm{P}_{mn}$$

$$T_{mn}.\mathrm{P}_{mn} = \mathrm{P}_{mn},\ \mathrm{P}_{mn}.\mathrm{P}_{mn} = T_{mn},\ \P\mathrm{P}_{mn} = \mathrm{P}_{mn}$$