Δομική προετοιμασία για τη Γενική Σχετικότητα

Ν. Λυγερός

Ο Gauss (1777-1855) μελέτησε για πρώτη φορά τις επιπτώσεις της απόρριψης του Ευκλείδειου αξιώματος περί παραλληλίας. Είναι όμως ο Riemann (1826-1866) που δημοσίευσε τη γενίκευση της εργασίας του για χώρους μεγαλύτερους των δύο διαστάσεων. Η ριζοσπαστική ιδέα του Einstein (1879-1955) ήταν να συνδέσει τη βαρύτητα με τους χώρους του Riemann μέσω της Γενικής Σχετικότητας. Βασίστηκε, μεταξύ άλλων, στην ιδιότητα αυτών των χώρων, δηλαδή να είναι τοπικά επίπεδη, αλλά οι τοπικά ευθείες γραμμές να μην παραμένουν πάντα παράλληλες. Αυτές τις γενικευμένες ευθείες γραμμές, δηλαδή τις γεωδαισιακές, τις ταύτισε με την τροχιά του φωτός. Και αυτός ο ισομορφισμός των νοητικών σχημάτων επιτρέπει τον αφανισμό της έννοιας της δύναμης της κλασικής προσέγγισης. Το κύριο εργαλείο, το οποίο δίνει αυτή την πρακτική δυνατότητα είναι ο τανυστικός λογισμός. Ο τανυστής του τύπου $\binom{O}{N}$ είναι μία απεικόνιση Ν διανυσμάτων επί του συνόλου των πραγματικών αριθμών, η οποία είναι γραμμική σε καθένα από τα Ν ορίσματά της. Η γραμμικότητα στο πρώτο όρισμα είναι:

$\left(\alpha\vec{A}\right)\cdot\vec{B}=\alpha\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)$ και $\left(\vec{A}+\vec{B}\right)\cdot\vec{C}=\vec{A}\cdot\vec{C}+\vec{B}\cdot\vec{C}$

Ενώ η γραμμικότητα στο δεύτερο όρισμα είναι: $\vec{A}\cdot\left(\beta\vec{B}\right)=\beta\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)$ και

$$\vec{A}\cdot\left(\vec{B}+\vec{C}\right)=\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}$$

Έστω g ο μετρικός τανυστής, τότε: $g\left(\vec{A},\vec{B}\right)\equiv\vec{A}\cdot\vec{B}$

Ο τανυστής του τύπου $\binom{M}{N}$είναι μια γραμμική συνάρτηση που απεικονίζει Μ 1-μορφές και Ν διανύσματα σε πραγματικούς αριθμούς. Κατά τον ίδιο τρόπο με τον οποίο η μετρική απεικονίζει ένα διάνυσμα σε μια 1–μορφή, απεικονίζει και έναν τανυστή $\binom{N}{M}$ σε έναν τανυστή $\begin{pmatrix}N-1\\M+1\end{pmatrix}$.

Για να κατανοήσουμε καλύτερα την ουσία της Γενικής Σχετικότητας σε σχέση με την Ειδική Σχετικότητα, πρέπει να διαπιστώσουμε πρώτα ποιες είναι οι επιπτώσεις όταν οι 1– μορφές και τα διανύσματα βάσης είναι τα ίδια παντού. Διότι αυτή η ιδιότητα δεν ισχύει στη Γενική Σχετικότητα.

Ο ρυθμός μεταβολής ενός τανυστή Τ του τύπου $\binom{1}{1}$, ο οποίος γράφεται

$$T=T^{a}_{\beta}\widetilde{\omega}^{\beta}\otimes\vec{e}_{a}$$

είναι:

$$\frac{dT}{d\tau}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{T(\tau+\Delta\tau)-T(z)}{\Delta\tau}=\left(\frac{dT^{a}_{\beta}}{d\tau}\right)\widetilde{\omega}^{\beta}\otimes\vec{e}_{a}$$

κι όπως:

$\frac{dT^a_\beta}{d\tau} = T^a_{\beta,\gamma} \cup^\gamma$, έχουμε

$$\frac{dT}{d\tau} = \left(T^a_{\beta,\gamma}\widetilde{\omega}^\beta \otimes \vec{e}_a\right) \cup^a$$

άρα τελικά: $\nabla T \equiv T^a_{\beta,\gamma}\widetilde{\omega}^\beta \otimes \widetilde{\omega}^\gamma \otimes \vec{e}_a$