Ο τανυστής καμπυλότητας του Riemann,

οι ταυτότητες του Bianchi

και εξισώσεις πεδίου του Einstein

Ν. Λυγερός

Μέσω των συμβόλων του Christoffel $\Gamma^{\alpha}_{\mu,\beta}$, η γραφή του τανυστή καμπυλότητας του Riemann

είναι η εξής: $R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} \equiv \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu,\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu,\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\mu}\Gamma^{\sigma}_{\beta\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}_{\beta\mu}$

Αν εισάγουμε τοπικά αδρανειακές συντεταγμένες, η παραγώγιση ως προς x^{λ}δίνει:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu,\lambda} = \frac{1}{2}\left(g_{\alpha\nu,\beta\mu\lambda} - g_{\alpha\mu,\beta\nu\lambda} + g_{\beta\mu,\alpha\nu\lambda} - g_{\beta\nu,\alpha\mu\lambda}\right)$$

Κι αν γράψουμε τους τανυστές: $R_{\alpha\beta\lambda\mu,\nu}$ και $R_{\alpha\beta\nu\lambda,\mu}$

βρίσκουμε ότι ισχύει η εξής εξίσωση:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu,\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\mu,\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda,\mu} = 0$$

Και αυτή η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την επόμενη:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu} = 0$$

διότι στις συντεταγμένες μας έχουμε: $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = 0$

Αυτή η τανυστική εξίσωση ονομάζεται ταυτότητες του Bianchi.

Μέσω της συστολής του τανυστή $R^{\mu}_{\alpha\nu\beta}$, ως προς τον πρώτο και τον τρίτο δείκτη, καταλήγουμε στον τανυστή:

$$R_{\alpha\beta} \equiv R^{\mu}_{\alpha\mu\beta} = R_{\beta\alpha}$$

Οι συμμετρίες αυτού του τανυστή ως προς α, β και ως προς μ, ν αποδεικνύουν ότι οι συστολές δίνουν τον ίδιο τανυστή ή μηδέν. Κατά συνέπεια, η ουσιαστική συστολή του τανυστή του Riemann, είναι ο τανύσης του Ricci. Με ανάλογο τρόπο, υπολογίζουμε και το βαθμωτό του Ricci:

$$R \equiv g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}R_{\alpha\mu\beta\nu}$$

Η συστολή των ταυτοτήτων του Bianchi μάς δίνει:

$$g^{\alpha\mu}\left[R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu}\right] = 0$$

ή τις συνεσταλμένες ταυτότητες του Bianchi

$$R_{\beta\nu;\lambda} + \left(-R_{\beta\nu;\lambda}\right) + R^{\mu}{}_{\beta\nu\lambda;\mu} = 0$$

Αν κάνουμε ακόμη μία συστολή θα βρούμε:

$$(2R^{\mu}{}_{\lambda} - \delta^{\mu}{}_{\lambda}R);\mu = 0$$

Είναι οι διπλά συνεσταλμένες ταυτότητες Bianchi:

Έτσι, αν ορίσουμε τον τανυστή $G^{\alpha\beta} \equiv R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R$

βλέπουμε ότι είναι συμμετρικός και έχει την ιδιότητα:

$$G^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0$$

Με αυτόν τον τανυστή ο Einstein έγραψε τις εξισώσεις πεδίου

$$G^{\alpha\beta} = 8\kappa\pi T^{\alpha\beta}$$