Γεωδαισιακές στη Γενική Σχετικότητα

Ν. Λυγερός

Η Γενική Σχετικότητα έχει ως υπόβαθρο τη γεωμετρία του Riemann, η οποία γενικεύει τη γεωμετρία του Minkowski της Ειδικής Σχετικότητας. Καθώς η έννοια της απόστασης ορίζεται από τη μετρική, έχουμε τη γεωδαισιακή μέσω του λογισμού μεταβολών, η οποία αποτελεί, όταν υπάρχει, την μικρότερη απόσταση. Στο πλαίσιο της Γενικής Σχετικότητας, η απόσταση μεταξύ των σημείων P_1 και P_2 είναι:

$$s_{12} = \int_{P_1}^{P_2} ds = \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{g_{ik} d\xi^i d\xi^k} = \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{g_{ik} \frac{d\xi^i}{dp} \frac{d\ \ \xi^k}{dp}} dp$$

Για να υπολογίσουμε τη γεωδαισιακή, εκτιμούμε τη μεταβολή μέσω Euler – Lagrange:

$$\delta \int_A^B L(y_\alpha, y'_\alpha) dx = \int_A^B \sum_\alpha \left[\frac{\partial L}{\partial y_\alpha} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'_\alpha}\right)\right] \delta y_\alpha dx$$

Ενώ: $\frac{\partial L}{\partial y_\alpha} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'_\alpha}\right) = 0$

Άρα, εδώ έχουμε αν ορίσουμε: $\xi^{l'} = \frac{d\xi^l}{dp}$

$$\frac{\partial L}{\partial \xi^l} = \frac{\partial L}{\partial g_{ik}} g_{ik,l} = \frac{1}{2} \frac{g_{ik,l} \xi^{i'} \xi^{k'}}{\sqrt{g_{rs} \xi^{r'} \xi^{s'}}} = \frac{1}{2} g_{ik,l} \xi^{i'} \xi^{k'} \frac{dp}{ds}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \xi^{l'}} = \frac{g_{il} \xi^{i'}}{\sqrt{g_{rs} \xi^{r'} \xi^{s'}}} = g_{il} \xi^{i'} \frac{dp}{ds}$$

Κατά συνέπεια: $\frac{d}{dp}\left(\frac{\partial L}{\partial \xi^{l'}}\right) = \frac{dp}{ds}\left[g_{il,k} \xi^{i'} \xi^{k'} + g_{il} \xi^{i''} + g_{il} \xi^{i'} \frac{d_p^2/ds^2}{(dp/ds)^2}\right]$

Έτσι:

$$\delta_{s_{12}} = \int_{P_1}^{P_2} \frac{dp}{ds} \left\{\left(\frac{1}{2} g_{ik,l} - g_{il,k}\right) \xi^{i'} \xi^{k'} - g_{il} \xi^{i''} - g_{il} \xi^{i'} \frac{d_p^2/ds^2}{(dp/ds)^2}\right\} \delta\xi^l dp$$

Μέσω της συμμετρίας των δεικτών *i* και *k* έχουμε τη μορφή:

$$\delta_{s_{12}} = -\int_{P_1}^{P_2} \frac{dp}{ds} \left\{\frac{1}{2}\left(g_{il,k} + g_{kl,i} - g_{ik,l}\right) \xi^{i'} \xi^{k'} + g_{il} \xi^{i''} + g_{il} \xi^{i'} \frac{d_p^2/ds^2}{(dp/ds)^2}\right\} \delta\xi^l dp$$

Καθώς: $[ik, s] = \frac{1}{2}\left(g_{is,k} + g_{ks,i} - g_{ik,s}\right)$

Η διαφορική εξίσωση της γεωδαισιακής είναι:

$$[ik, l] \xi^{i'} \xi^{k'} + g_{il} \xi^{i''} + g_{il} \xi^{i'} \frac{d_p^2/ds^2}{(dp/ds)^2} = 0$$

Με άλλα λόγια: $\xi^{s''} + \left\{ {s \atop ik} \right\} \xi^{i'} \xi^{k'} + \xi^{s'} \frac{d_p^2/ds^2}{(dp/ds)^2} = 0$

Κι αν *s* είναι η παράμετρος έχουμε: $\frac{d^2\xi^l}{ds^2} + \left\{ {l \atop ik} \right\} \frac{d\xi^i}{ds} \frac{d\xi^k}{ds} = 0$