Χαρακτηρισμός επίπεδων μετρικών στη Γενική Σχετικότητα

Ν. Λυγερός

Έστω $\begin{Bmatrix} l \\ ik \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} q^{ls}\left(g_{is,k} + g_{ks,i} - g_{ik,s}\right)$όπου g_{ik} είναι μετρική. Κι έστω οι διαφορικοί κανόνες: $\delta\alpha^l = -\Gamma^l_{ik}\alpha^i\delta\xi^k$ και $\delta b_i = +\Gamma^l_{ik}b^l\delta\xi^k$, τότε υπάρχει ένα σύστημα συντεταγμένων, όπου η μετρική έχει την εξής μορφή:

$ds^2 = \sum_i \varepsilon_i \, dx^i dx^i$ όπου $\varepsilon_i = \pm 1$ αν η παράλληλη μετάθεση είναι ολοκληρώσιμη.

Έστω σ' ένα σημείο P, ένα σύνολο από n συναλλοίωτα διανύσματα $\overset{s}{b_i}$, τα οποία είναι γραμμικά ανεξάρτητα κι όπου το n είναι ο αριθμός των διαστάσεων. Με άλλα λόγια ισχύει η εξής ανισότητα.

$$\Delta \equiv \delta^{i_1 \dots i_k} b^1_{i_1} \dots b^n_{in} \neq 0$$

Όπου $\delta^{i_1 \dots i_k}$ είναι ο συναναλλοίωτος τανυστής πυκνότητας του Levi – Civita.

Αν μετά φέρουμε όλα τα n διανύσματα b^s_i πάνω στο ίδιο μονοπάτι.

$$\delta\Delta = \delta^{i_1 \dots i_n}\left[\Gamma^k_{i_1 s} b^1_k b^2_{i_2} \dots b^n_{i_n} + \cdots + \Gamma^k_{i_k s} b^1_{i_1} b^n_k\right] \delta\xi^s$$

$$\delta\Delta = b_{i_1} \dots b^n_{i_n}\left[\delta^{k i_2 \dots i_k}\Gamma^{i_1}_{ks} + \cdots + \delta^{i_1 \dots k}\Gamma^{i_n}_{ks}\right]\delta\xi^s$$

Μέσω της ανταλλαγής των δεικτών i_1 και i_2 έχουμε:

$$\delta^{k i_1 \dots i_n}\Gamma^{i_2}_{ks} + \delta^{i_2 k \dots i_n}\Gamma^{i_1}_{ks} + \cdots + \delta^{i_2 i_1 \dots k}\Gamma^{i_n}_{ks}$$

$$= -\left[\delta^{i_1 k \dots i_n}\Gamma^{i_2}_{ks} + \delta^{k i_2 \dots i_n}\Gamma^{i_1}_{ks} + \cdots + \delta^{i_1 i_2 \dots k}\Gamma^{i_n}_{ks}\right]$$

Το k δεν μπορεί παρά να είναι ο δείκτης i_s διότι όλες οι άλλες συνιστώσες του τανυστή μηδενίστηκαν.
Κατά συνέπεια, έχουμε:

$$\delta\Delta = b_{i_1} \dots b^n_{i_n} \cdot \delta^{i_1 \dots i_n}\Gamma^k_{ks} = \Delta\Gamma^k_{ks}\delta\xi^s$$

Αυτό σημαίνει ότι η γραμμική ανεξαρτησία των διανυσμάτων διατηρείται στην παράλληλη μετάθεση.

Αν υποθέσουμε ότι $\begin{Bmatrix} l \\ ik \end{Bmatrix}$ είναι συμμετρική ως προς τους δείκτες κι είναι ολοκληρώσιμη, τότε τα πεδία που παράγουν τα διανύσματα είναι βαθμωτά. Καθώς η ιακωβιανή δεν μηδενίζεται λόγω της ανισότητας $\Delta \neq 0$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι στο νέο σύστημα συντεταγμένων έχουμε $\Gamma^1_{ik} = 0$

$\Gamma_{ik}^{*l} = \frac{\partial \xi^a}{\partial \xi^{*i}} \frac{\partial \xi^b}{\partial \xi^{*k}} \left(\frac{\partial \xi^{*l}}{\partial \xi^c} \Gamma_{ab}^c - \frac{\partial^2 \xi^{*l}}{\partial \xi^a \partial \xi^b} \right)$

Κι όπως $\frac{\partial \xi^{*l}}{\partial \xi^c} \Gamma_{ab}^c - \frac{\partial^2 \xi^{*l}}{\partial \xi^a \partial \xi^b} = b_c^l \Gamma_{ab}^c - b_{a,b}^l$. Συμπεραίνουμε ότι $\Gamma_{ik}^{*l} = 0$

Καθώς $\frac{1}{2}\left(g_{ik,l} + g_{il,k} - g_{kl,i}\right) = \begin{Bmatrix} s \\ kl \end{Bmatrix} g_{si}$ και $\frac{1}{2}\left(g_{ki,l} + g_{kl,i} - g_{il,k}\right) = \begin{Bmatrix} s \\ il \end{Bmatrix} g_{sk}$

Άρα $g_{ik,l} = \begin{Bmatrix} s \\ kl \end{Bmatrix} g_{si} + \begin{Bmatrix} s \\ il \end{Bmatrix} g_{sk}$. Δηλαδή αν $\begin{Bmatrix} s \\ kl \end{Bmatrix} = 0$ τότε τα g_{ik} είναι σταθερά.

Το τελικό αποτέλεσμα το πετυχαίνουμε με ορθογωνιοποίηση και κανονικοποίηση.