Η αλγεβρική εξίσωση του Liapounov

Νίκος Λυγερός

Η κλασική επίλυση ενός γραμμικού συστήματος βασίζεται στην ιδέα ότι όλα μπορούν να μετατραπούν και να παρουσιαστούν με μια μορφή πινάκων του τύπου Ax=B όπου A είναι ένας σταθερός πίνακας και B ένα διάνυσμα. Η λύση υπάρχει και είναι μοναδική όταν ο αντίστροφος του A, δηλαδή ο A^{-1} υπάρχει, πράγμα το οποίο ισχύει όταν δεν μηδενίζεται η ορίζουσα του πίνακα A. Σε αυτό το πλαίσιο μπορούμε να κινηθούμε για να κατανοήσουμε και την αλγεβρική εξίσωση του Liapounov, η οποία δεν είναι παρά μια κλασική γενίκευση του πρώτου προβλήματος. Όμως αυτή η γενίκευση παίζει ένα σημαντικό ρόλο στη θεωρία των συστημάτων.

Έστω A και B δύο σταθεροί πίνακες διαστάσεων nxn και mxm.

Αν έχουμε δύο πίνακες M και C διαστάσεων nxm, τότε η εξίσωση AM + MB έχει νόημα και ονομάζεται εξίσωση Liapounov. Ας εξετάσουμε ένα θεωρητικό παράδειγμα με n=3 και m=2. Έχουμε λοιπόν:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \\ m_{31} & m_{32} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \\ m_{31} & m_{32} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}$$

Μια ισόμορφη παρουσίαση είναι η εξής:

$$\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12} & a_{13} & b_{21} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22}+b_{11} & a_{23} & 0 & b_{21} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+b_{11} & 0 & 0 & b_{21} \\ b_{12} & 0 & 0 & a_{11}+b_{22} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & b_{12} & 0 & a_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & b_{12} & a_{31} & a_{32} & a_{33}+b_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{21} \\ m_{31} \\ m_{12} \\ m_{22} \\ m_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \\ c_{12} \\ c_{22} \\ c_{32} \end{bmatrix}$$

Αντιλαμβανόμαστε ότι αυτή η μορφή είναι η κλασική γραμμική αλγεβρική εξίσωση. Παρατηρούμε ότι ο πρώτος πίνακας αποτελείται από τέσσερις πίνακες, εκ των οποίων δύο είναι διαγώνιοι και στην ουσία βαθμωτοί του μοναδιαίου.

Ας ορίσουμε $\mathcal{A}$ (M) : = AM +MB. Τότε η εξίσωση Liapounov γράφεται πιο απλά ως εξής:

$$\mathcal{A}\,(M) = C$$

Επιπλέον ένα βαθμωτό n είναι ιδιοτιμή του πίνακα $\mathcal{A}$ αν υπάρχει ένας μη μηδενικός πίνακας M τέτοιος ώστε

$$\mathcal{A}\,(M) = n\,M$$

Καθώς ο πίνακας $\mathcal{A}$ είναι τετράγωνος διαστάσεων nm x nm, έχει nm ιδιοτιμές n_κ. Έτσι έχουμε

$$n_\kappa = \lambda_i + \mu_j \quad \text{για} \quad i = 1,2,\ldots,n$$

$$\text{και} \quad j = 1,2,\ldots,m$$

όπου λ_i είναι ιδιοτιμή του πίνακα A και μ_j ιδιοτιμή του πίνακα B.

Η λύση της εξίσωσης Liapounov υπάρχει αν δεν υπάρχουν i και j τέτοια ώστε:

$\lambda_i + \mu_j = 0$ διότι η ορίζουσα του πίνακα είναι το γινόμενο των ιδιοτιμών. Σε αυτή την περίπτωση η αλγεβρική εξίσωση του Liapounov δεν είναι ιδιόμορφη. Στις άλλες περιπτώσεις η ύπαρξη λύσεων δεν είναι δεδομένη και πρέπει να εξεταστεί ανάλογα με το πίνακα C σε σχέση με τον χώρο του $\mathcal{A}$.