Εξισώσεις του Einstein και ασθενή βαρυτικά πεδία

Νίκος Λυγερός

Στη βαρυτική θεωρία του Newton, έχουμε το νόμο: $\nabla^2\phi = 4\pi G\rho$ όπου ρ είναι η πυκνότητα μάζας. Η γενίκευση αυτής της θεωρίας μέσω της Γενικής Σχετικότητας του Einstein, οδηγεί στις εξισώσεις πεδίου $G + \Lambda g = \kappa T$. Αν υποθέσουμε ότι η κοσμολογική σταθερά μηδενίζεται, τότε $\kappa = 8\pi$, αλλιώς δεν θα υπάρχει δυνατή εφαρμογή στο ηλιακό σύστημα όπου ισχύει η προσέγγιση του Newton. Στην πραγματικότητα, αν παραμείνουμε στο πλαίσιο της Γενικής Σχετικότητας, τότε αυτός ο υπολογισμός δεν είναι παρά η παραγωγή των εξισώσεων του Einstein εφαρμοσμένη σε ασθενή βαρυτικά πεδία. Γεωμετρικά, αυτή η πράξη μπορεί να ερμηνευτεί με τη χρήση ενός χωροχρόνου σχεδόν επίπεδου με την έννοια της αναλυτικής προσέγγισης. Με άλλα λόγια, θα έχουμε όσον αφορά στη μετρική, $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$ όπου $|h_{\alpha\beta}| \ll 1$. Αυτές οι συντεταγμένες όπου ορίζονται οι συνιστώσες της μετρικής με τον προηγούμενο τρόπο, είναι οι λεγόμενες σχεδόν – Lorentz. Και οι μετασχηματισμοί Lorentz υποβάθρου και οι μετασχηματισμοί βαθμίδας, μετατρέπουν ένα σύστημα σχεδόν – Lorentz, σε ένα άλλο. Σε αυτό το πλαίσιο, τουλάχιστον σε πρώτη τάξη ως προς $h_{\mu\nu}$, ο τανυστής Riemann γράφεται: $R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(h_{\alpha\nu,\beta\mu} + h_{\beta\mu,\alpha\nu} - h_{\alpha\mu,\beta\nu} - h_{\beta\nu,\alpha\mu}\right)$.

Αν θεωρήσουμε λοιπόν ότι ο $h_{\alpha\beta}$ είναι τανυστής σε χωροχρονικό ¨υπόβαθρο¨ Minkowski σημαίνει ότι είναι τανυστής της Ειδικής Σχετικότητας. Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε: $h^{\mu}\beta = \eta^{\mu\alpha}h_{\alpha\beta}$, $h^{\nu\beta} = \eta^{\nu\beta}h^{\mu}\beta$ και $h = h^{\alpha}_{\alpha}$

Κατά συνέπεια ο τανυστής του αντίθετου ίχνους του $h_{\alpha\beta}$, έχει τη μορφή:

$$\bar{h}^{\alpha\beta} = h^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}h$$

Άρα ο τανυστής του Einstein ισούται με: $G_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\left[\bar{h}_{\alpha\beta,\mu}{}^{,\mu} + \eta_{\alpha\beta}\bar{h}^{,\mu\nu} - \bar{h}_{\alpha\mu,\beta}{}^{,\mu} - \bar{h}_{\beta\alpha,\alpha}{}^{,\mu}\right]$

Επιπλέον αν απαιτήσουμε: $\bar{h}^{,\mu\nu}_{,\nu} = 0$, η οποία ονομάζεται συνθήκη βαθμίδας Lorentz, τότε ο τανυστής του Einstein απλοποιείται αν εισάγουμε τον τελεστή του d' Alembert. $\Box f = f^{,\mu}_{,\mu} = \eta^{\mu\nu} f_{,\mu\nu} = \left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2\right) f$

Ο τανυστής του Einstein μετατρέπεται σε :

$$G^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\Box\bar{h}^{\alpha\beta}$$

Συνεπώς οι εξισώσεις του Einstein για ασθενή πεδία έχουν τη μορφή:

$$\Box\bar{h}^{\mu\nu} = -16\pi T^{\mu\nu}$$

Πιο συγκεκριμένα έχουμε τη γραμμικοποιημένη θεωρία της Γενικής Σχετικότητας του Einstein, η οποία είναι συμβατή με τη δράση της βαρύτητας στο πλαίσιο του ηλιακού συστήματος.