Η λύση του Schwarzschild στη Γενική Σχετικότητα

Νίκος Λυγερός

Η λύση του Schwarzschild ανήκει στις σπάνιες περιπτώσεις, στις οποίες είναι δυνατή η ακριβής λύση του πεδίου βαρύτητας δίχως προσεγγίσεις. Αυτό οφείλεται στον χαρακτήρα της Γενικής Σχετικότητας του Einstein: μη γραμμικότητα. Αυτή η λύση κωδικοποιεί την περίπτωση ενός ακίνητου υλικού. Ας εξετάσουμε αναλυτικά αυτό το πρόβλημα. Με την υπόθεση ότι αυτή η λύση είναι σφαιρικά συμμετρική, μπορούμε να εισάγουμε την χωρική μεταβλητή $r=\sqrt{\left(\xi^1\right)^2+\left(\xi^2\right)^2+\left(\xi^3\right)^2}$. Τότε το πιο γενικό γραμμικό στοιχείο γράφεται ως εξής:

$$d\tau^2 = A(r)d\left(\xi^4\right)^2 + 2B(r)\chi_s d\xi^4 d\xi^s - C(r)\delta_{rs} d\xi^r d\xi^s + D(r)\chi_r\chi_s d\xi^r d\xi^s$$

όπου $\chi_r = \dfrac{\xi^r}{r}$ και A, B, C, D είναι συναρτήσεις της χωρικής μεταβλητής. Σε πρώτη φάση μέσω μετασχηματισμού συντεταγμένων, θα μετατρέψουμε το πρόβλημα με A,B,C και D σε πρόβλημα με A και D. Ο πρώτος μετασχηματισμός είναι ο εξής: $\xi^{*4} = \xi^4 + f(r)$, $\xi^{*s} = \xi^s$. Κατά συνέπεια έχουμε : $g^*_{4s} = g_{44}\dfrac{\partial\xi^4}{\partial\xi^{*s}} + g_{4s}$. Αυτό σημαίνει με άλλα λόγια : $B^* = B - \dfrac{df}{dr}A$. Άρα επιλέγοντας: $\dfrac{df}{dr} = \dfrac{B}{A}$

αποφεύγουμε τη χρήση της συνάρτησης. Έστω η μετρική : $g_{44} = A,\quad g_{4s} = 0,$ $g_{rs} = -C\delta_{rs} + D\chi_r\chi_s$. Έστω ο δεύτερος μετασχηματισμός συντεταγμένων: $\xi^{*s} = g(r) = \xi^s \quad \xi^s = \psi\left(r^*\right)\xi^{*s} \quad r = \psi r^* \quad \chi^*_s = \chi_s$. Οι συνισταμένες g_{rs} μετασχηματίζονται ως εξής: $g^*_{rs} = \dfrac{\partial\xi^i}{\partial\xi^{*r}}\dfrac{\partial\xi^k}{\partial\xi^{*s}} g_{ik}$

$$g^*_{rs} = \left(\psi\delta^i_r + r^*\frac{d\psi}{dr^*}\chi_i\chi_r\right)\left(\psi\delta^k_s + r^*\frac{d\psi}{dr^*}\chi_k\chi_s\right)\left(-C\delta_{ik} + D\chi_i\chi_k\right)$$

$$g^*_{rs} = -\psi^2 C\delta_{rs} + \left[\left(\psi + r^*\frac{d\psi}{dr^*}\right)^2 D - r^*\frac{d\psi}{dr^*}\left(2\psi + r^*\frac{d\psi}{dr^*}\right)C\right]\chi_r\chi_s$$

Κατά συνέπεια, αν επιλέξουμε $\psi = C^{-1/2}$, τότε σε αυτό το σύστημα συντεταγμένων θα έχουμε $C=1$. Τώρα το πρόβλημα εξαρτάται μόνο από A και D.

Για λόγους υπολογιστικούς, που θα αναδειχθούν στη συνέχεια, εισάγουμε τις συναρτήσεις μ και ν με τον εξής τρόπο: $g_{44} = A = e^{\nu}$ $\quad g_{4s} = 0$ και

$g_{rs}=-\delta_{rs}+D\chi_r\chi_s=-\delta_{rs}+\left(1-e^{\nu}\right)\chi_r\chi_s$ όπου $\nu=\ln(A-D)$. Έτσι οι συνισταμένες του συναναλλοίωτου μετρικού τανυστή είναι : $g_{44}=e^{-\mu}, g^{4s}=0$ $g^{rs}=-\delta_{rs}+\left(1-e^{-\nu}\right)\chi_r\chi_s$. Έστω ο τανυστής $G_{\mu\nu}$. Τα σύμβολα του Christoffel του πρώτου τύπου είναι: $[44,s]=-\frac{1}{2}\mu' e^{\mu}\chi_s$, $[4s,4]=+\frac{1}{2}\mu' e^{\mu}\chi_s$ και $[rs,t]=\chi_t\left[\frac{1-e^{\nu}}{r}(\delta_{rs}-\chi_r\chi_s)-\frac{1}{2}\nu' e^{\nu}\chi_r\chi_s\right]$.

Τα σύμβολα του Christoffel του δεύτερου τύπου είναι:

$$\begin{Bmatrix} s \\ 44 \end{Bmatrix}=\frac{1}{2}\mu' e^{\mu-\nu}\chi_s,\ \begin{Bmatrix} 4 \\ 4s \end{Bmatrix}=\frac{1}{2}\mu'\chi_s \ \text{και}\ \begin{Bmatrix} t \\ rs \end{Bmatrix}=\chi_t\left[\frac{1-e^{-\nu}}{r}(\delta_{rs}-\chi_r\chi_s)+\frac{1}{2}\nu'\chi_r\chi_s\right].$$

Για τον τανυστή $R_{\mu\nu}$ έχουμε τα εξής αποτελέσματα: $R_{44}=-e^{\mu-\nu}\left\{\frac{1}{2}\mu''+\frac{1}{r}\mu'+\frac{1}{4}\mu'(\mu'-\nu')\right\}$, $R_{4s}=0$ και

$$R_{rs}=\left\{\frac{1}{2}\mu''-\frac{1}{r}\nu'+\frac{1}{4}\mu'(\mu'-\nu')\right\}\chi_r\chi_s+\left\{\frac{1}{r^2}-e^{-\nu}\left[\frac{1}{r^2}+\frac{1}{2r}(\mu'-\nu')\right]\right\}(\chi_r\chi_s-\delta_{rs})$$

Για τον τανυστή $G_{\mu\nu}$ έχουμε ανάλογα : $G_{44}=e^{\mu}\left\{e^{-\nu}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{\nu'}{r}\right)-\frac{1}{r^2}\right\}$, $G_{4s}=0$,

$$G_{rs}=-\left\{\frac{\mu'}{r}+\frac{1-e^{\nu}}{r^2}\right\}\chi_r\chi_s+\left\{\frac{1}{2}\mu''+\frac{1}{4}\mu'(\mu'-\nu')+\frac{1}{2r}(\mu'-\nu')\right\}e^{-\nu}(\chi_r\chi_s-\delta_{rs}).$$

Για το πρόβλημα μας , το πεδίο βαρύτητας καθορίζεται ως εξής : $G^{\mu\nu}=0$.

Αυτό σημαίνει ότι έχουμε το εξής σύστημα να λύσουμε:

$$\nu'-\frac{1}{r}(1-e^{\nu})=0$$

$$\mu'+\frac{1}{r}(1-e^{\nu})=0$$

$$\mu''+\frac{1}{2}\mu'(\mu'-\nu')-\frac{1}{r}(\mu'-\nu')=0$$

Η πρώτη εξίσωση λύνεται.

Εισάγουμε τη μεταβλητή x τέτοια ώστε $x=e^{-\nu}$.

Άρα έχουμε: $\frac{dx}{dr}+\frac{x-1}{r}=0$ και η λύση είναι $x=1-\frac{a}{r}$, $\nu=-\ln(1-\frac{a}{r})$ και $D=-\frac{a}{r-a}$ όπου α είναι απλώς η σταθερά του ολοκληρώματος. Και μέσω της πρώτης και της δεύτερης εξίσωσης έχουμε εύκολα: $\mu=\ln(1-\frac{a}{r})+\beta$ όπου β είναι άλλη σταθερά.

Ως συνέπεια έχουμε: $g_{44}=e^{\beta}(1-\frac{a}{r})$, $g_{4s}=0$ και $g_{rs}=-\delta_{rs}+\left(1-\frac{1}{1-\frac{a}{r}}\right)\chi_r\chi_s$

Καθώς η μετρική πρέπει να είναι επίπεδη στο άπειρο, πρέπει να έχουμε β=0.

Για να βρούμε τη σταθερά α αρκεί να εξετάσουμε το δυναμικό του Newton και να το συγκρίνουμε. Έχουμε λοιπόν: $G=-\frac{1}{2}\frac{a}{r}$ και $G=-\frac{\kappa m}{r}$.

Άρα έχουμε αναγκαστικά : $a=2\kappa m$

Τελικά βρίσκουμε : $g_{44}=1-\frac{2\kappa m}{r}$, $g_{4s}=0$ και $g_{rs}=-\delta_{rs}-\frac{2\kappa m}{r-2\kappa m}\chi_r\chi_s$.

Και αυτή η λύση ονομάζεται λύση του Schwarzschild, την οποία ανακάλυψε το 1916.