Δομικές δυσκολίες, Γενική Σχετικότητα και Γεωμετρία του Weyl

Νίκος Λυγερός

Ιστορικά το νοητικό σχήμα του μετασχηματισμού βαθμίδας προέρχεται από την προσπάθεια του Hermann Weyl να γενικεύσει τη θεωρία της Γενικής Σχετικότητας και να ενσωματώσει μια δομή ικανή ν' αντέξει την ένταξη του ηλεκτρομαγνητισμού στο πεδίο βαρύτητας. Σε αυτή τη νέα γεωμετρία ο Hermann Weyl χαρακτηρίζει τη γεωμετρική δομή του χώρου μέσω του συμμετρικού τανυστή πυκνότητας $g_{\mu\nu}$ και του «ψευδοδιανύσματος» ϕ_μ. Η ιδέα, η οποία είναι φυσιολογική με τα δεδομένα της Γενικής Σχετικότητας είναι να αντιπροσωπεύει το βαρυτικό πεδίο το $g_{\mu\nu}$ και το ϕ_μ να είναι οι συνισταμένες του διανύσματος δυναμικού. Αρχικά στο φορμαλισμό του Weyl, το ϕ_μ μετασχηματιζόταν σαν ένα διάνυσμα σε σχέση με τους μετασχηματισμούς συντεταγμένων, αλλά διαμορφώνεται μέσω της κλίσης όταν δρα ο μετασχηματισμός βαθμίδας. Σε γενικές γραμμές έχουμε μέσω της προσέγγισης του λογισμού μεταβολών του Lagrange τα εξής αποτελέσματα στη γεωμετρία του Weyl. Υπάρχουν διάφορες βαθμωτές πυκνότητες βάρους +1, τις οποίες μπορούμε να κατασκευάσουμε μέσω των συνισταμένων του τανυστή καμπυλότητας

$$R^2 \; ; \quad R_{\kappa\lambda}R^{\kappa\lambda} \; ; \quad R_{\iota\kappa\lambda\mu}R^{\iota\kappa\lambda\mu} \; ; \quad \phi_{\kappa\lambda}\phi^{\kappa\lambda} \; .$$

Σε σχέση με το $g_{\mu\nu}$, οι τρεις πρώτες είναι της τετάρτης διαφορικής τάξης. Η πιο γενική λαγκραζιανή είναι ένας γραμμικός συνδυασμός αυτών των τεσσάρων. Το πρόβλημα αυτής της προσέγγισης είναι ότι στο επίπεδο της δεύτερης διαφορικής τάξης, υπάρχουν περισσότερες λύσεις από εκείνες που καθορίζουν το βαρυτικό πεδίο και κατά συνέπεια είναι δύσκολη η εξήγηση της ακρίβειας αυτής της μοντελοποίησης της φύσης σε τέταρτη διαφορική τάξη σε σχέση με τη δεύτερη διαφορική τάξη. Επιπλέον η λαγκραζιανή δεν είναι μονοσήμαντη, αφού κάθε γραμμικός συνδυασμός είναι αρμόδιος. Με άλλα λόγια αυτό το τέχνασμα δεν επαρκεί εφόσον η ενοποίηση απαιτεί την εισαγωγή ενός αυθαίρετου συντελεστή στη λαγκραζιανή, για να αντιπροσωπεύει την ηλεκτρομαγνητική πυκνότητα. Αυτή η προσέγγιση δείχνει βέβαια τις δυσκολίες του μετασχηματισμού βαθμίδας για εκείνη την εποχή. Δεν πρέπει όμως να ξεχάσουμε ότι ακριβώς αυτό το πλαίσιο επέτρεψε στους Salam και Weinberg να ενοποιήσουν τις ηλεκτρο-ασθενείς δυνάμεις. Η γεωμετρία του Riemann μπορεί να εμπεριέχει δυσκολίες για την εφαρμογή της στη φυσική, αλλά δίνει ταυτόχρονα πολλαπλές μαθηματικές δυνατότητες.