Introduction élémentaire aux complexes simpliciaux

N.Lygeros

A) Simplex fermé: $[v_0, v_1, ..., v_k]$ est un sous-ensemble convexe d'un espace vectoriel V généré par les vecteurs $v_0, v_1, ..., v_k$ en position générale, où k est appelée la dimension du simplex.

k-simplex : simplex de dimension k

Coordonnées barycentriques de x : ce sont les $a_i(x)$ lorsque nous avons

$$x = \sum_{i=0}^{k} a_i v_i \in [v_0, v_1, ..., v_k]$$

Simplex ouvert: ensemble des points x tels $a_i(x) > 0$.

Il est noté : $(v_0, v_1, ..., v_k)$. Si $[s]$ est un simplex fermé, (s) sera son simplex ouvert correspondant.

Faces fermées de $[s]$: Ce sont les simplex fermés $[v_{j_0}, v_{j_1}, ..., v_{j_l}]$ où $\{j_0, j_1, ..., j_l\}$ est un sous-ensemble non vide de $\{0,1,...,k\}$.

Complexe simplicial K : C'est une réunion finie de simplex ouverts de $\mathbb{R}^n$ telle que :

1) Si $(s) \in K$, alors toutes les faces ouvertes de (s) sont également dans K ;

2) Si $(s_1), (s_2) \in K$ et $(s_1) \cap (s_2) \neq \varnothing$, alors $(s_1) = (s_2)$

Dimension de K : c'est la plus grande dimension des simplex de K.

Réunion des simplex de K : $|K| := \bigcup_{(s)\in K} (s) = \bigcup_{(s)\in K} [s]$

Sous-complexe : Un sous-complexe L de K est simplicial si $(s) \in L$ alors $(s) \in K$

n-squelette : $K^n = \{(s) \in K \mid \dim s \leq n = \dim K\}$

Subdivision de K : complexe S tel que $|K| = |S|$ et tout simplexe ouvert de S est contenu dans un simplex ouvert de S est contenu dans un simplex ouvert de K.

Proposition : Soit K un complexe simplicial. Définissons sur K un ordre partiel par $s_1 \leq s_2$ si et seulement si s_1 est une face de s_2. Alors
$K^{(1)} := \{(b(s_0), ..., b(s_k) \mid s_0 < ... < s_k, s_0 ..., s_k \in K\}$ est une subdivision de K, appelée la première subdivision barycentrique de K.

$K^{(n)} := \left(\left(\left(K^{(1)}\right)^{(1)}\right)....\right)^{(1)}$ est la n-ième subdivision barycentrique.

Complexe abstrait : c'est un couple (K,Σ) où K est un ensemble (fini ou infini) et Σ une famille de sous-ensembles finis de K, appelés simplex, telle que :

1) Tout $\alpha \in K$ appartient à au moins un simplex et au plus un nombre fini de simplex

2) Si $s \in \Sigma$, alors $s' \in \Sigma$ pour tout $s' \leq s$ (c'est la propriété d'hérédité)

Théorème : Soient $f : |K| \to |L|$ une fonction continue et φ une approximation simpliciale de f. Soit M un sous-complexe de K tel que la restriction de f à $|M|$ soit une application simpliciale. Alors il existe une homotopie de f à φ qui est stationnaire sur $|M|$.

Corollaire : Une fonction continue est homotope à son approximation simpliciale.