Application de la théorie des jeux dans un cas boursier réel

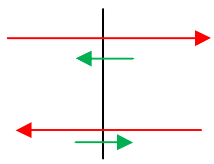
P. Gazzano, N. Lygeros

Nous étudions la position d'un vendeur qui cherche à vendre ses titres et celle d'un acheteur qui cherche à acheter un titre. Il s'agit donc d'un jeu à deux joueurs. L'action à un instant donné vaut S_t. Nous posons V_1, le volume de titres que le vendeur accorde à un écart ds donné, et V_2, le volume que l'acheteur accorde à un écart ds donné. L'action étudiée est dans ce cas Citigroup du NYSE à la date du 21/11/2008.

Nous considérons qu'une transaction est effectuée lorsque $|V_1(ds) - V_2(ds)|$ a atteint son minimum, c'est-à-dire lorsque le point $s*$ est atteint :

$$|V_1(ds*) - V_2(ds*)| = \min_s |V_1(ds) - V_2(ds)|$$

Afin de pouvoir se placer dans le cadre des jeux à somme nulle à deux joueurs, nous supposons que le vendeur, qui anticipe une baisse des marchés, veut vendre son action et en acquérir une autre à un plus bas prix. L'acheteur, qui anticipe une hausse des marchés, veut acheter une action à un plus haut prix que l'action qu'il possède déjà. Nous pouvons représenter les mouvements par le diagramme suivant, où les flèches rouges représentent le vendeur, et les flèches vertes représentent l'acheteur :



Dans le but d'étudier l'évolution des volumes, nous avons représenté sur le même graphique les volumes cumulés du carnet d'ordre à un instant donné.

En abscisse, nous avons l'écart en valeur absolue par rapport au prix à l'instant t. Il s'agit d'un reflêt du consensus. Si le vendeur veut avoir un comportement proche du marché, il doit avoir les deux courbes d'utilité tracées sur le graphique.

En bleu, nous avons la série 1 qui correspond aux volumes cumulés pour des niveaux de prix supérieurs à S_t i.e. le vendeur émet une proposition de vente. Comme il veut le vendre au plus cher, nous sommons les volumes en nous éloignant du prix. Dans ce premier cas, nous avons une fonction d'utilité directe, puisque c'est le vendeur qui émet l'ordre.

En rouge, nous avons la série 2 qui correspond aux volumes «décumulés» pour des niveaux de prix inférieur à S_t i.e. le vendeur répond à une proposition d'achat d'un acheteur. Comme il veut le vendre au plus haut à cet acheteur, nous sommons en partant du bas et on remonte jusqu'à St. Dans ce second cas, nous avons une fonction d'utilité indirecte, puisque le vendeur recrée une fonction d'utilité par rapport à ce qui existe sur le marché. (cf. plus bas).

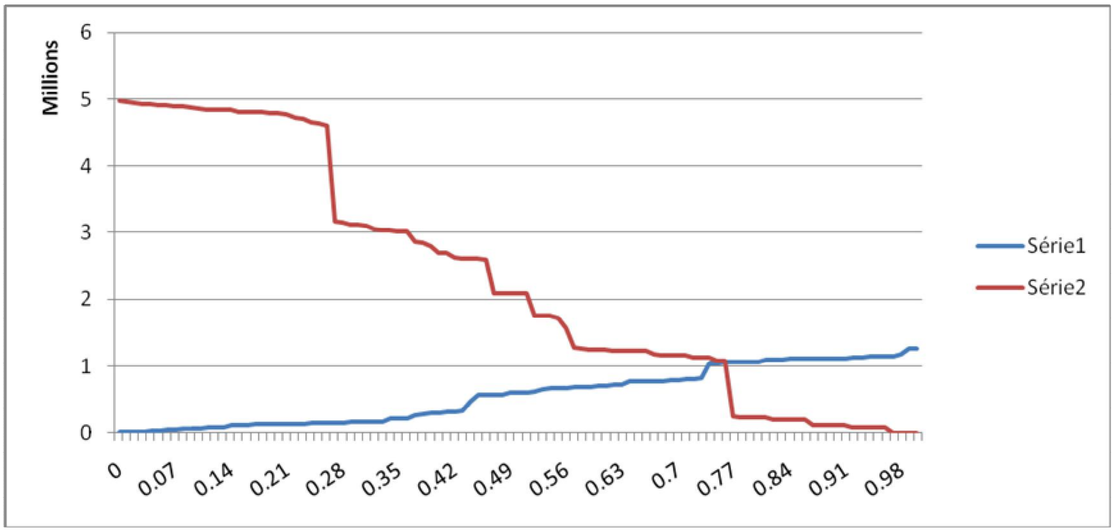
Etant donné la construction de la fonction d'utilité, pour laquelle nous avons sommé les volumes, nous considérons les stratégies mixtes s_0, s_1, s_2 … suivantes :

$S_{t,0}$ $\quad s_0 = V_0$

$S_{t,1}$ $\quad s_1 = \left(S_{t,0}V_0 + S_{t,1}V_1\right)/\left(V_0 + V_1\right)$

$S_{t,2}$ $\quad s_2 = \left(S_{t,0}V_0 + S_{t,1}V_1 + S_{t,2}V_2\right)/\left(V_0 + V_1 + V_2\right)$

$S_{t,3}$ $\quad \ldots\ldots\ldots\ldots$



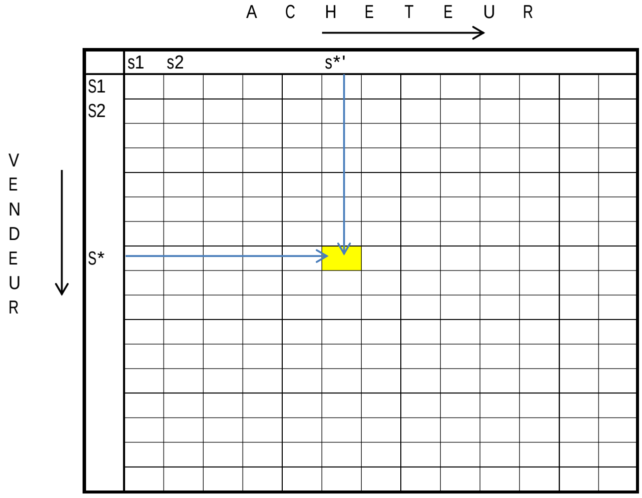
La courbe rouge, lorsqu'elle est renormalisée, représente aussi une fonction de repartition de probabilité. Ainsi, lorsque l'on s'éloigne du point 0, le vendeur aura de moins en moins de chance d'exécuter son ordre, même si, bien sûr, il va augmenter son gain. Ce vendeur doit trouver donc trouver un point pour lequel il va pouvoir maximiser son gain, sans pour autant réduire ces chances de voir son ordre exécuté. Alors, le point de croisement représente le compromis ente quantité et probabilité.

Lorsque la courbe bleue et la courbe rouge se croisent en $ds^* \approx 0.77$, nous avons :

$$V_1(ds^*) - V_2(ds^*) = 0$$

C'est l'écart par rapport au prix réel pour lequel le vendeur va maximiser son gain espéré. Nous notons alors s* la stratégie correspondante.

Nous avons le raisonnement réciproque pour l'acheteur pour lequel nous obtenons un autre écart $ds^{*'}$, écart pour lequel l'acheteur va minimiser son coût. Nous notons alors s*' la stratégie correspondante. Nous pouvons construire alors la matrice des gains suivante:



La situation formée par les deux stratégies S^* = (s*,s*') (représentée en jaune) est un équilibre de Nash. Si nous supposons en effet que l'acheteur conserve sa stratégie s*', alors le vendeur n'a aucun intérêt à modifier sa stratégie s*, puisque s'il modifie stratégie, il gagnera en gain (perdra en gain) mais perdra en probabilité d'exécution (gagnera en probabilité d'exécution). Ayant le même raisonnement pour l'acheteur, nous avons bien :

$$p_{1,2} = \max_{i=1\ldots n} p_{1,2}(S^*; s_i)$$

Bibliographie :

-J. F. Nash, « Equilibrium Points in N-Person Games », Proc. N.A.S 36 1950 48-49
-P. Gazzano, N. Lygeros, La théorie des marchés en tant qu'extension de la théorie des jeux I. Opus 5473.