

Η εξίσωση του John Nash στη Γενική Σχετικότητα

N. Αυγερός

Μία από τις προσπάθειες στις γενίκευσης της Γενικής Σχετικότητας για να ενσωματωθεί το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο σ' ένα πλαίσιο όπου υπάρχει μόνο ένα γεωμετρικό υπόβαθρο της βαρύτητας είναι και η προσέγγιση του John Nash. Ακολουθεί έμμεσα ιδέες ανάλογες από αυτές που αποτελούν τα νοητικά σχήματα του προγράμματος Einstein-Infeld-Hoffman. Στην πραγματικότητα, όπως συνήθως με τον John Nash, το πλαίσιό του ήταν αρχικά εντελώς διαφορετικό αλλά με την πάροδο του χρόνου ανακάλυψε ότι το πεδίο του συγκλίνει με αυτό το πρόγραμμα. Το νέο της υπόθεσης είναι η εύρεση μιας βαθμωτής εξίσωσης, η οποία προέρχεται φυσιολογικά από την ταυτοτική εξίσωση του κενού. Η μορφή της εξίσωσης του John Nash είναι η εξής:

$$\square R + \left(\frac{n-4}{2n-4} \right) (2R^{\rho s} R_{\rho s} - R^2) = 0$$

Οι πρώτες παρατηρήσεις που μπορούμε να κάνουμε είναι απλές αλλά και ενδεικτικές του ερευνητικού ανοίγματος που προκαλεί αυτή η εξίσωση.

Όταν έχουμε $n=2$, βρίσκουμε μια ιδιομορφία, η οποία αντανακλά το γεγονός ότι ο τανυστής του Einstein είναι ταυτοτικά μηδενικός κατά συνέπεια δεν υπάρχει βαθμωτή εξίσωση που προέρχεται από την αρχική τανυστική εξίσωση. Ενώ όταν έχουμε $n=4$, η εξίσωση του John Nash απλοποιείται ριζικά και εκφράζει απλά την ιδέα ότι η βαθμωτή καμπυλότητα ικανοποιεί τον τελεστή του κύματος εάν ερμηνέσουμε τη συμβολή του τελεστή του d' Alembert στο χώρο-χρόνο με 3+1 διαστάσεις. Μία άλλη ιδιότητα αυτής της εξίσωσης είναι ότι ισχύει ανεξαρτήτως από την τιμή της κοσμολογικής σταθεράς. Αυτή η προσέγγιση διατηρεί την ίδια αισθητική με εκείνη του Albert Einstein, ο οποίος είχε αρχικά μόνο την τανυστική εξίσωση του κενού. Με ανάλογο τρόπο λειτούργησε και η προσέγγιση του David Hilbert δίνοντας έμφαση στο μαθηματικό χαρακτήρα της εξίσωσης κι όχι στη φυσική ερμηνεία του συμβολισμού. Η παρατήρηση του John Nash είναι ότι, και ο Albert Einstein και ο David Hilbert έκαναν χρήση την μηδενική απόκλιση δηλαδή της εξίσωσης :

$$T^{ab} \cdot b = 0$$

Έτσι, μέσω υπολογιστικού λογισμού κατάφερε μετά από πολλές προσπάθειες να εισάγει ως δεδομένο της εξής εξίσωσης ένα επίπεδο κενό:

$$I^{ab} = \square T^{ab} - T^{as}; s^b - T^{sb}; s^a + g^{ab} T^{\rho s}; \rho s$$

Το αξιοσημείωτο αυτής της ταυτότητας είναι ότι ακόμα και αν ο τανυστής T^{ab} δεν έχει μηδενική απόκλιση, αυτή διατηρεί την ιδιότητα. Βέβαια η εξίσωση του John Nash δεν λύνει το αρχικό πρόβλημα της ενοποίησης των ηλεκτρομαγνητικών και βαρυτικών πεδίων αλλά αποτελεί ένα μαθηματικό βήμα.