

Sur l'existence de points-selle dans le cas d'un jeu financier réel

P.Gazzano, N.Lygeros

Dans la continuité de nos précédents articles, nous allons étudier la théorie des jeux dans un cadre réel d'actions financières. En nous reposant sur les résultats de J. von Neumann et O. Morgenstern démontrés dans l'ouvrage « *Theory of Games and Economics behavior* », nous étudions dans cet article l'existence de points selle dans un jeu à deux joueurs.

Nous devons donc construire un jeu à somme nulle. Un jeu est défini par :

- le nombre de joueur, dans tout l'article fixé à 2.
- le payoff.
- l'ensemble des stratégies possibles et leurs nombres.

Définition des stratégies :

Il serait bien évidemment tentant de définir les stratégies comme l'émission d'un ordre d'achat ou de vente. Mais une telle considération ne permet pas de créer facilement un jeu à somme nulle. Nous considérons plutôt qu'une stratégie ne correspond non pas à l'émission d'un ordre, mais plutôt à une action qui va engendrer un flux d'argent. Ainsi les actions possibles sont :

- émission d'un ordre d'achat (BID) : l'agent qui émet un ordre d'achat est prêt à payer une certaine quantité pour recevoir une action. Si cet ordre est exécuté, l'émetteur devra verser un flux d'argent, en l'échange d'une action. Cette action est considérée comme un coup possible.
- réponse à un ordre d'achat : l'agent qui répond à un ordre d'achat devra donner une action, en échange d'un flux d'argent à l'émetteur de l'ordre. Cette action ne nécessite pas de verser une quantité d'argent, donc cette action n'est pas considérée comme un coup possible.
- émission d'un ordre de vente (ASK) : l'agent qui émet un ordre de vente est prêt à vendre une action en échange d'une certaine quantité d'argent. Il ne devra pas verser un flux d'argent, et donc cette action n'est pas considérée comme un coup.
- réponse à un ordre de vente : l'agent qui répond à un ordre de vente est prêt à acheter pour un certain prix (fixé par l'émetteur) une action. Il verse à l'émetteur un flux d'argent. Cette action peut-être considérée comme un coup possible.

Nous allons maintenant donner les règles du jeu. Nous supposons que chacun des joueurs possède une action (le joueur 1 possède A et le joueur 2 possède B).

Etant donné que le nombre de stratégies du joueur 2 est égale au nombre de niveaux compris entre 1 et S_t , le nombre de stratégies du joueur 1 sera égale à $S_T = 2S_t$ afin de rendre le jeu équitable.

Coup 1 :

Le joueur 2 émet un ordre d'achat à un certain niveau x , compris entre 0 et S_t . Cette action engendre un flux d'argent x de la part du joueur 2 envers le joueur 1. Le joueur 1 en échange transmet l'action A au joueur 2.

Coup 2 :

Le joueur 1 choisit de répondre à un ordre de vente à un niveau y , compris entre S_t et S_T . Cette action engendre un flux d'argent y de la part du joueur 1 envers le joueur 2. Le joueur 2 en échange transmet l'action B au joueur 1.

Définition du payoff :

In fine, le joueur 1 reçoit $y - x$ et le joueur 2 reçoit $x - y$. Le jeu est bien à somme nulle. Les ordres de vente émis par le joueur 2 sont annulés.

Bien sûr, le joueur 2 va vouloir acheter l'action A au plus bas prix (y), et 1 va vouloir vendre l'action A au plus haut prix (y). Inversement, le joueur 1 va vouloir acheter l'action B au plus bas prix (x), le joueur 2 va vouloir vendre l'action B au plus haut prix (x). Une situation conflictuelle se dégage ainsi par les règles du jeu définie plus haut.

Il est évident que si l'on ne tient pas compte des préférences de chacun des joueurs, les joueurs auront intérêt à jouer tout le temps les mêmes stratégies, (celle qui maximise leur propre payoff), ces stratégies étant parfaitement connues à l'avance par les joueurs. Afin d'éviter cette faille, nous attribuons à chaque stratégie un coefficient multiplicatif, qui est calculé à partir des fonctions d'utilité de chacun des joueurs. L'introduction de coefficients multiplicatifs crée un aléa entre les stratégies. Un joueur rationnel choisira une stratégie qui lui assure un payoff relativement haut, mais sans être trop haut car il risque de voir diminuer les chances de réponse par l'autre joueur.

Supposons d'abord que les coefficients soient tous égaux, normalisés à 1. Nous pouvons alors construire la matrice de payoff suivante. En colonne, nous avons les stratégies du joueur 2 et en ligne, nous avons les stratégies du joueur 1.

Avec une telle distribution de coefficients, le joueur 2 aura toujours intérêt à jouer la stratégie S_0 et le joueur 1 la stratégie S_T . Un exemple pour $S_t = 15$ donne :

		Joueur 2: emission d'un ordre d'achat															
		15€	14€	13€	12€	11€	10€	9€	8€	7€	6€	5€	4€	3€	2€	1€	
Joueur 1:	30€	15€	16€	17€	18€	19€	20€	21€	22€	23€	24€	25€	26€	27€	28€	29€	
	29€	14€	15€	16€	17€	18€	19€	20€	21€	22€	23€	24€	25€	26€	27€	28€	
	28€	13€	14€	15€	16€	17€	18€	19€	20€	21€	22€	23€	24€	25€	26€	27€	
	27€	12€	13€	14€	15€	16€	17€	18€	19€	20€	21€	22€	23€	24€	25€	26€	
	26€	11€	12€	13€	14€	15€	16€	17€	18€	19€	20€	21€	22€	23€	24€	25€	
	25€	10€	11€	12€	13€	14€	15€	16€	17€	18€	19€	20€	21€	22€	23€	24€	
	24€	9€	10€	11€	12€	13€	14€	15€	16€	17€	18€	19€	20€	21€	22€	23€	
	23€	8€	9€	10€	11€	12€	13€	14€	15€	16€	17€	18€	19€	20€	21€	22€	
	22€	7€	8€	9€	10€	11€	12€	13€	14€	15€	16€	17€	18€	19€	20€	21€	
	21€	6€	7€	8€	9€	10€	11€	12€	13€	14€	15€	16€	17€	18€	19€	20€	
	20€	5€	6€	7€	8€	9€	10€	11€	12€	13€	14€	15€	16€	17€	18€	19€	
	19€	4€	5€	6€	7€	8€	9€	10€	11€	12€	13€	14€	15€	16€	17€	18€	
	18€	3€	4€	5€	6€	7€	8€	9€	10€	11€	12€	13€	14€	15€	16€	17€	
	17€	2€	3€	4€	5€	6€	7€	8€	9€	10€	11€	12€	13€	14€	15€	16€	
	16€	1€	2€	3€	4€	5€	6€	7€	8€	9€	10€	11€	12€	13€	14€	15€	
	15€	0€	1€	2€	3€	4€	5€	6€	7€	8€	9€	10€	11€	12€	13€	14€	

En appelant $P(t_1, t_2)$ le payoff résultant du choix de la stratégie t_1 par le joueur 1 et t_2 par le joueur 2, nous remarquons l'existence d'un point selle défini par :

$$\max_{t_1} \min_{t_2} P(t_1, t_2) = \min_{t_2} \max_{t_1} P(t_1, t_2)$$

repéré en jaune dans la matrice.

Ce résultat rejoint ainsi le résultat démontré par Von Neumann et Morgenstern dans l'ouvrage déjà cité plus haut. Les deux résultats sont équivalents d'un point de vue des schémas mentaux. Il est donc naturel de considérer ce jeu comme strictement déterminé, car chacun des joueurs connaît à l'avance le payoff qu'il va obtenir en fonction de ses choix de stratégies ainsi que ceux de son adversaire. Pour reprendre la terminologie de Von Neumann et Morgenstern, le jeu est parfait, car l'information détenue par chaque joueur n'influence pas le payoff final. Nous n'avons pas tenu compte dans le calcul des préférences de chacun des joueurs, ni des conditions de marché. Nous pouvons alors complexifier le jeu, en modifiant le payoff, mais en gardant les mêmes règles.

Dans un article précédent, nous avons défini les courbes d'utilités comme la somme cumulée des volumes (qui sont des données de marchés) pour chaque niveau de prix. Nous allons alors tenir compte des fonctions d'utilité de chacun de joueurs. Pour chacun des joueurs, nous attribuons à chacune des stratégies pures le coefficient de préférences, calculé à partir des courbes d'utilité.

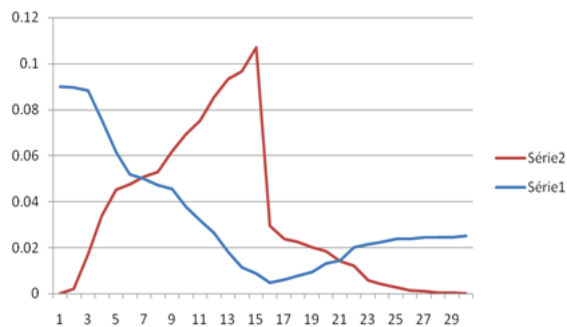
Le payoff espéré est donc $E(t_1, t_2) = xP(X = t_1) - yP(Y = t_2)$ où :

- x est le payoff du choix de la stratégie
- y est le payoff du choix de la stratégie
- $P(X = t_1)$ est la probabilité que le joueur 1 choisisse la stratégie t_1
- $P(Y = t_2)$ est la probabilité que le joueur 2 choisisse la stratégie t_2

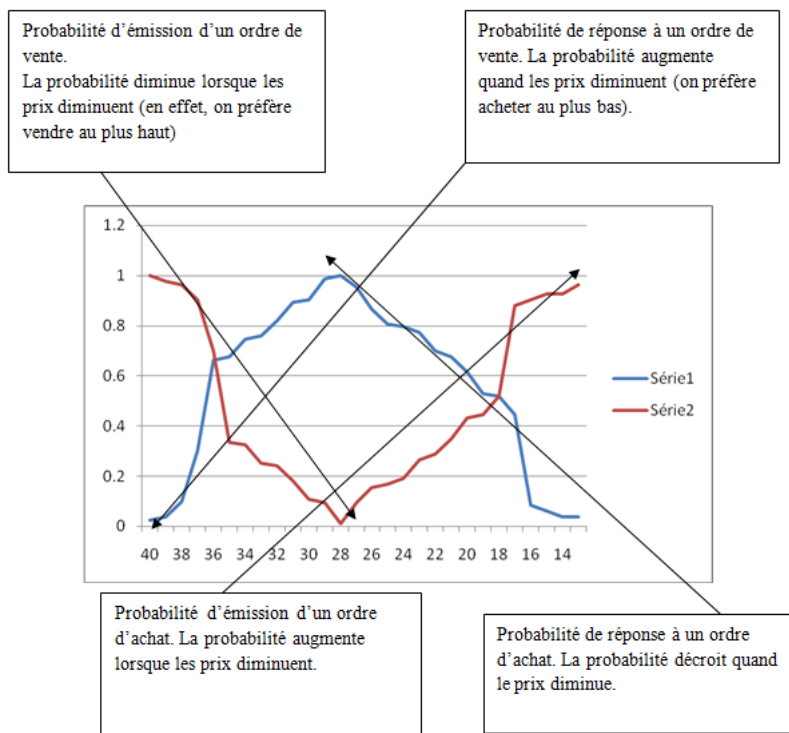
Nous donnons ci-dessous un exemple réel de volumes tiré de carnets d'ordres.

Prix	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Volumes	41200	10300	16800	14000	30400	14000	48000	10800	9800	10200	1800	6000	400	300	3000
Prix	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Volumes	1800	14000	109800	122000	84400	15200	24000	16000	65000	54000	45200	72800	58200	24000	75400

Le graphique ci-dessous représente les volumes cumulés et décumulés pour chaque niveau de prix. La courbe rouge représente le profil du joueur 1 et la courbe bleue représente le profil du joueur 2.



Nous donnons dans le graphique ci-dessous les significations de l'évolution des différentes courbes.



En appliquant les coefficients donnés par les courbes de préférences des joueurs aux stratégies pures,

Joueur 1 :

30 €	29 €	28 €	27 €	26 €	25 €	24 €	23 €	22 €	21 €	20 €	19 €	18 €	17 €	16 €
0.0101	0.0141	0.0207	0.0319	0.0355	0.0400	0.0459	0.0535	0.0650	0.0755	0.0841	0.0957	0.1000	0.1050	0.1103

Joueur 2 :

15 €	14 €	13 €	12 €	11 €	10 €	9 €	8 €	7 €	6 €	5 €	4 €	3 €	2 €	1 €
0.0056	0.0168	0.0258	0.0409	0.0488	0.0506	0.0573	0.0723	0.0840	0.0930	0.0949	0.0957	0.1025	0.1053	0.1065

nous obtenons les matrices de payoff suivantes :

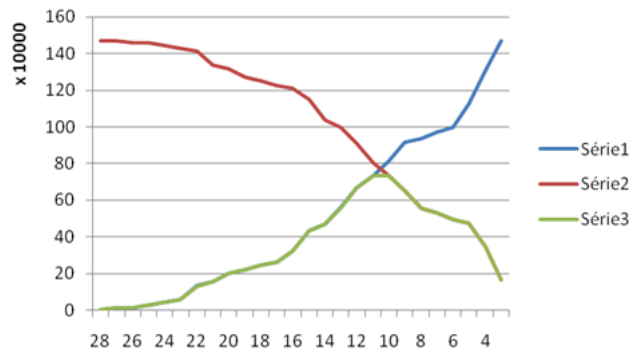
		Joueur 2: Emet une proposition d'achat														
		15 €	14 €	13 €	12 €	11 €	10 €	9 €	8 €	7 €	6 €	5 €	4 €	3 €	2 €	1 €
Joueur 1: Réponse à une proposition de vente	30 €	-0.367 €	0 €	0 €	1 €	1 €	2 €	2 €	2 €	2 €	3 €	3 €	3 €	3 €	3 €	3 €
	29 €	-0 €	0 €	0 €	1 €	1 €	2 €	2 €	2 €	2 €	3 €	3 €	3 €	3 €	3 €	3 €
	28 €	-1 €	-1 €	-0 €	0 €	1 €	1 €	1 €	1 €	2 €	2 €	2 €	2 €	2 €	3 €	3 €
	27 €	-2 €	-1 €	-1 €	-0 €	0 €	1 €	1 €	1 €	1 €	1 €	2 €	2 €	2 €	2 €	2 €
	26 €	-2 €	-1 €	-1 €	-1 €	-0 €	0 €	0 €	0 €	1 €	1 €	1 €	1 €	2 €	2 €	2 €
	25 €	-2 €	-2 €	-1 €	-1 €	-0 €	0 €	0 €	0 €	1 €	1 €	1 €	1 €	1 €	2 €	2 €
	24 €	-2 €	-2 €	-1 €	-1 €	-0 €	-0 €	0 €	0 €	1 €	1 €	1 €	1 €	1 €	1 €	1 €
	23 €	-3 €	-2 €	-2 €	-1 €	-1 €	-1 €	-0 €	-0 €	0 €	0 €	1 €	1 €	1 €	1 €	1 €
	22 €	-3 €	-2 €	-2 €	-1 €	-1 €	-1 €	-1 €	-0 €	-0 €	0 €	0 €	1 €	1 €	1 €	1 €
	21 €	-3 €	-3 €	-2 €	-2 €	-1 €	-1 €	-1 €	-1 €	-0 €	-0 €	0 €	0 €	0 €	0 €	1 €
	20 €	-3 €	-3 €	-2 €	-2 €	-1 €	-1 €	-1 €	-1 €	-1 €	-0 €	-0 €	0 €	0 €	0 €	0 €
	19 €	-3 €	-3 €	-2 €	-2 €	-1 €	-1 €	-1 €	-1 €	-1 €	-0 €	-0 €	0 €	0 €	0 €	0 €
	18 €	-4 €	-3 €	-3 €	-2 €	-2 €	-2 €	-1 €	-1 €	-1 €	-1 €	-0 €	-0 €	-0 €	-0 €	0 €
	17 €	-4 €	-3 €	-3 €	-2 €	-2 €	-2 €	-1 €	-1 €	-1 €	-1 €	-0 €	-0 €	-0 €	-0 €	0 €
	16 €	-4 €	-3 €	-3 €	-2 €	-2 €	-2 €	-1 €	-1 €	-1 €	-1 €	-0 €	-0 €	-0 €	-0 €	0 €

Autre exemple :

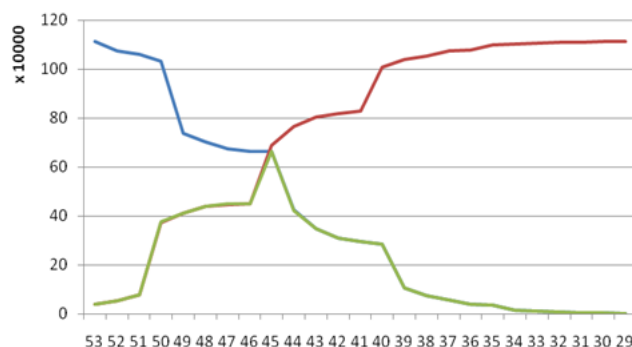
		Joueur 2: Emet une proposition d'achat														
		15 €	14 €	13 €	12 €	11 €	10 €	9 €	8 €	7 €	6 €	5 €	4 €	3 €	2 €	1 €
Joueur 1: Réponse à une proposition de vente	30 €	4.653 €	5 €	5 €	6 €	6 €	6 €	7 €	7 €	7 €	7 €	8 €	8 €	8 €	8 €	8 €
	29 €	4 €	4 €	4 €	5 €	5 €	5 €	6 €	6 €	6 €	6 €	7 €	7 €	7 €	7 €	7 €
	28 €	3 €	3 €	4 €	4 €	4 €	5 €	5 €	5 €	6 €	6 €	6 €	6 €	6 €	6 €	6 €
	27 €	2 €	3 €	3 €	3 €	4 €	4 €	4 €	5 €	5 €	5 €	5 €	6 €	6 €	6 €	6 €
	26 €	2 €	2 €	2 €	3 €	3 €	3 €	4 €	4 €	4 €	4 €	5 €	5 €	5 €	5 €	5 €
	25 €	1 €	1 €	2 €	2 €	2 €	2 €	3 €	3 €	3 €	4 €	4 €	4 €	4 €	4 €	4 €
	24 €	0 €	1 €	1 €	2 €	2 €	2 €	2 €	3 €	3 €	3 €	3 €	4 €	4 €	4 €	4 €
	23 €	-0 €	-0 €	0 €	1 €	1 €	1 €	2 €	2 €	2 €	2 €	3 €	3 €	3 €	3 €	3 €
	22 €	-1 €	-0 €	0 €	0 €	1 €	1 €	1 €	2 €	2 €	2 €	2 €	2 €	3 €	3 €	3 €
	21 €	-1 €	-1 €	-0 €	0 €	0 €	1 €	1 €	1 €	2 €	2 €	2 €	2 €	2 €	2 €	2 €
	20 €	-2 €	-1 €	-1 €	-0 €	-0 €	0 €	0 €	1 €	1 €	1 €	1 €	2 €	2 €	2 €	2 €
	19 €	-2 €	-1 €	-1 €	-1 €	-1 €	-0 €	0 €	1 €	1 €	1 €	1 €	1 €	2 €	2 €	2 €
	18 €	-2 €	-2 €	-1 €	-1 €	-1 €	-0 €	-0 €	0 €	1 €	1 €	1 €	1 €	1 €	1 €	1 €
	17 €	-2 €	-2 €	-1 €	-1 €	-1 €	-1 €	-1 €	-1 €	-0 €	0 €	0 €	1 €	1 €	1 €	1 €
	16 €	-3 €	-3 €	-2 €	-2 €	-2 €	-1 €	-1 €	-1 €	-0 €	-0 €	0 €	0 €	0 €	0 €	0 €

Nous observons que le point selle reste à la même place, mais il change bien évidemment de valeurs selon les coefficients appliqués.

Supposons maintenant que chacun des joueurs prennent en compte les préférences de son adversaire. Le joueur (2) qui va émettre un ordre d'achat sait que son adversaire va préférer répondre à son offre à de hauts niveaux de prix, plutôt qu'à des bas niveaux de prix. Les coefficients qu'il faudra appliquer à chaque stratégie pure, afin de respecter les préférences de deux joueurs sont donnés par la courbe verte.



En revanche, le joueur (1) qui va répondre à un ordre d'achat sait que son adversaire va préférer émettre un ordre de vente à de hauts niveaux de prix plutôt qu'à de bas niveaux. De la même manière, nous devons appliquer les coefficients définis par la courbe verte pour chacune des stratégies pures.



En appliquant les coefficients suivants, normalisés de telle manière que leur somme est égale à 1 :

Joueur 2 :

15 €	14 €	13 €	12 €	11 €	10 €	9 €	8 €	7 €	6 €	5 €	4 €	3 €	2 €	1 €
0.0206	0.0366	0.0495	0.0793	0.0839	0.0932	0.1275	0.1610	0.1338	0.1259	0.0910	0.0841	0.0742	0.0663	0.0347

Joueur 1 :

30 €	29 €	28 €	27 €	26 €	25 €	24 €	23 €	22 €	21 €	20 €	19 €	18 €	17 €	16 €	15 €
0.018	0.037	0.058	0.069	0.087	0.098	0.120	0.125	0.077	0.059	0.039	0.027	0.013	0.012	0.008	0.005

nous obtenons la matrice de payoff suivante. Le point selle est représenté en jaune.

		Joueur 2: Emet une proposition d'achat														
		15 €	14 €	13 €	12 €	11 €	10 €	9 €	8 €	7 €	6 €	5 €	4 €	3 €	2 €	1 €
Joueur 1:	30 €	0.22 €	0.02 €	-0.11 €	-0.42 €	-0.39 €	-0.40 €	-0.82 €	-0.76 €	-0.40 €	-0.22 €	0.08 €	0.20 €	0.31 €	0.40 €	0.50 €
	29 €	0.77 €	0.57 €	0.44 €	0.13 €	0.16 €	0.15 €	-0.07 €	-0.21 €	0.15 €	0.33 €	0.63 €	0.75 €	0.86 €	0.95 €	1.05 €
	28 €	1.31 €	1.11 €	0.97 €	0.67 €	0.69 €	0.69 €	0.47 €	0.33 €	0.68 €	0.86 €	1.16 €	1.28 €	1.39 €	1.48 €	1.58 €
	27 €	1.54 €	1.34 €	1.21 €	0.90 €	0.93 €	0.92 €	0.70 €	0.56 €	0.92 €	1.10 €	1.40 €	1.52 €	1.63 €	1.72 €	1.82 €
	26 €	1.95 €	1.75 €	1.62 €	1.31 €	1.34 €	1.33 €	1.11 €	0.97 €	1.32 €	1.51 €	1.81 €	1.92 €	2.04 €	2.13 €	2.23 €
	25 €	2.13 €	1.93 €	1.80 €	1.49 €	1.52 €	1.51 €	1.29 €	1.15 €	1.51 €	1.69 €	1.99 €	2.11 €	2.22 €	2.31 €	2.41 €
	24 €	2.56 €	2.36 €	2.23 €	1.92 €	1.95 €	1.94 €	1.72 €	1.58352 €	1.94 €	2.12 €	2.42 €	2.54 €	2.65 €	2.74 €	2.84 €
	23 €	2.56 €	2.35 €	2.22 €	1.91 €	1.94 €	1.93 €	1.72 €	1.58 €	1.93 €	2.11 €	2.41 €	2.53 €	2.64 €	2.73 €	2.83 €
	22 €	1.39 €	1.19 €	1.05 €	0.75 €	0.78 €	0.77 €	0.55 €	0.41 €	0.76 €	0.94 €	1.24 €	1.36 €	1.48 €	1.57 €	1.66 €
	21 €	0.93 €	0.72 €	0.59 €	0.28 €	0.31 €	0.30 €	0.09 €	-0.05 €	0.30 €	0.48 €	0.78 €	0.90 €	1.01 €	1.10 €	1.20 €
	20 €	0.47 €	0.26 €	0.13 €	-0.18 €	-0.15 €	-0.16 €	-0.37 €	-0.51 €	-0.16 €	0.02 €	0.32 €	0.44 €	0.55 €	0.64 €	0.74 €
	19 €	0.21 €	0.01 €	-0.12 €	-0.43 €	-0.40 €	-0.41 €	-0.63 €	-0.77 €	-0.42 €	-0.24 €	0.06 €	0.18 €	0.30 €	0.39 €	0.49 €
	18 €	-0.07 €	-0.27 €	-0.40 €	-0.71 €	-0.68 €	-0.69 €	-0.90 €	-1.05 €	-0.69 €	-0.51 €	-0.21 €	-0.09 €	0.02 €	0.11 €	0.21 €
	17 €	-0.10 €	-0.31 €	-0.44 €	-0.75 €	-0.72 €	-0.73 €	-0.94 €	-1.08 €	-0.73 €	-0.55 €	-0.25 €	-0.13 €	-0.02 €	0.07 €	0.17 €
	16 €	-0.19 €	-0.39 €	-0.52 €	-0.83 €	-0.80 €	-0.81 €	-1.02 €	-1.16 €	-0.81 €	-0.63 €	-0.33 €	-0.21 €	-0.10 €	-0.01 €	0.09 €

Autre exemple :

		Joueur 2: Emet une proposition d'achat														
		15 €	14 €	13 €	12 €	11 €	10 €	9 €	8 €	7 €	6 €	5 €	4 €	3 €	2 €	1 €
Joueur 1:	30 €	0.01 €	-0.03 €	-0.37 €	-0.63 €	-0.91 €	-0.89 €	-1.09 €	-0.93 €	-0.61 €	-0.50 €	-0.30 €	-0.13 €	-0.03 €	0.01 €	0.02 €
	29 €	0.34 €	0.30 €	-0.04 €	-0.30 €	-0.58 €	-0.56 €	-0.76 €	-0.60 €	-0.28 €	-0.17 €	0.03 €	0.20 €	0.30 €	0.34 €	0.35 €
	28 €	0.46 €	0.43 €	0.08 €	-0.18 €	-0.46 €	-0.43 €	-0.64 €	-0.47 €	-0.18 €	-0.05 €	0.15 €	0.32 €	0.43 €	0.46 €	0.48 €
	27 €	0.85 €	0.81 €	0.47 €	0.21 €	-0.07 €	-0.05 €	-0.25 €	-0.09 €	0.23 €	0.34 €	0.54 €	0.71 €	0.81 €	0.85 €	0.86 €
	26 €	1.00 €	0.97 €	0.62 €	0.37 €	0.08 €	0.11 €	-0.10 €	0.07 €	0.38 €	0.49 €	0.69 €	0.87 €	0.97 €	1.00 €	1.02 €
	25 €	1.13 €	1.09 €	0.75 €	0.49 €	0.21 €	0.23 €	0.03 €	0.19 €	0.51 €	0.62 €	0.82 €	0.99 €	1.10 €	1.13 €	1.15 €
	24 €	1.20 €	1.17 €	0.83 €	0.57 €	0.28 €	0.31 €	0.10 €	0.27 €	0.58 €	0.70 €	0.90 €	1.07 €	1.17 €	1.21 €	1.22 €
	23 €	1.43 €	1.39 €	1.05 €	0.79 €	0.51 €	0.53 €	0.33 €	0.49 €	0.81 €	0.92 €	1.12 €	1.29 €	1.39 €	1.43 €	1.44 €
	22 €	2.18 €	2.15 €	1.81 €	1.55 €	1.27 €	1.29 €	1.08588 €	1.25 €	1.57 €	1.68 €	1.88 €	2.05 €	2.15 €	2.19 €	2.20 €
	21 €	1.98 €	1.94 €	1.60 €	1.34 €	1.06 €	1.08 €	0.88 €	1.04 €	1.36 €	1.47 €	1.67 €	1.84 €	1.95 €	1.98 €	2.00 €
	20 €	1.71 €	1.68 €	1.33 €	1.07 €	0.79 €	0.82 €	0.61 €	0.78 €	1.09 €	1.20 €	1.40 €	1.57 €	1.68 €	1.71 €	1.73 €
	19 €	1.26 €	1.22 €	0.88 €	0.62 €	0.34 €	0.36 €	0.16 €	0.32 €	0.64 €	0.75 €	0.95 €	1.12 €	1.22 €	1.26 €	1.28 €
	18 €	0.84 €	0.80 €	0.46 €	0.20 €	-0.08 €	-0.05 €	-0.26 €	-0.09 €	0.22 €	0.33 €	0.53 €	0.70 €	0.81 €	0.84 €	0.86 €
	17 €	0.66 €	0.62 €	0.28 €	0.02 €	-0.26 €	-0.24 €	-0.44 €	-0.28 €	0.04 €	0.15 €	0.35 €	0.52 €	0.62 €	0.66 €	0.67 €
	16 €	0.37 €	0.34 €	-0.00 €	-0.26 €	-0.55 €	-0.52 €	-0.73 €	-0.56 €	-0.25 €	-0.14 €	0.06 €	0.24 €	0.34 €	0.37 €	0.39 €

Avec de tels coefficients, nous observons un nouveau phénomène : le point selle existe toujours, mais celui-ci change de place et de valeurs. Mais il reste surtout au centre de la matrice de payoff, ce qui semble être logique puisque chacun des joueurs doit faire un compromis entre ses préférences et celles de l'autre joueur. La présence du point selle nous montre que le jeu est encore une fois strictement déterminé. En posant v la valeur du point selle, cela signifie que le joueur 1 en jouant correctement est certain de s'assurer un payoff supérieur à v , quelque soit la stratégie jouée par 2. Et de manière symétrique, le joueur 2, en jouant correctement, est certain de s'assurer un payoff supérieur à $-v$, quelque soit la stratégie jouée par 1. L'existence du point selle provient de la monotonie des coefficients appliqués (puisque'ils sont croissants jusqu'à un certain point, puis ils sont ensuite décroissants). Mais aussi du fait que l'ensemble des coefficients d'un joueur sera le même quelque soit le niveau de prix joué par l'autre joueur : la préférence du joueur 2 de jouer x_2 par rapport à y_2 sera identique quelque soit la stratégie jouée par 1. On peut en conclure que les joueurs seront certains à l'avance de l'existence d'un point selle, mais ils ne sauront pas où il se trouve.