Κίνηση σωματιδίου σε βαρυτικό πεδίο

Ν. Λυγερός

Έστω το πλαίσιο της Ειδικής Σχετικότητας:

$$\delta s = -mc\delta\int ds = 0$$

Για να περάσουμε στη Γενική Σχετικότητα υπάρχει ένας άμεσος τρόπος

$$\delta ds^2 = 2ds\delta ds = \delta\left(g_{i\kappa}dx^l dx^\kappa\right) = dx^i dx^\kappa \frac{\partial g_{i\kappa}}{\partial x^l}\delta x^l + 2g_{i\kappa}dx^i d\delta x^\kappa = 0$$

Κατά συνέπεια, όσον αφορά στο δS έχουμε το εξής.

$$\delta S = -mc\int\left\{\frac{1}{2}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^\kappa}{ds}\frac{\partial g_{i\kappa}}{\partial x^l}\delta x^l + g_{i\kappa}\frac{dx^i}{ds}\frac{d\delta x^\kappa}{ds}\right\}ds$$

$$\delta S = -mc\int\left\{\frac{1}{2}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^\kappa}{ds}\frac{\partial g_{i\kappa}}{\partial x^l}\delta x^l - \frac{d}{ds}\left(g_{i\kappa}\frac{dx^i}{ds}\right)\delta x^\kappa\right\}ds$$

Το νοητικό σχήμα είναι το εξής.

$$\frac{1}{2}\upsilon^i\upsilon^\kappa\frac{\partial g_{i\kappa}}{\partial x^l} - \frac{d}{ds}\left(g_{il}\upsilon^i\right) = \frac{1}{2}\upsilon^i\upsilon^\kappa\frac{\partial g_{i\kappa}}{\partial x^l} - g_{il}\frac{d\upsilon^i}{ds} - \upsilon^i\upsilon^\kappa\frac{\partial g_{il}}{\partial x^\kappa} = 0$$

Και $\quad -\upsilon^i\upsilon^\kappa\frac{\partial g_{il}}{\partial x^\kappa} = -\frac{1}{2}\upsilon^i\upsilon^\kappa\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^\kappa} + \frac{\partial g_{\kappa l}}{\partial x^i}\right)$

Καθώς $\quad \Gamma_{i,\kappa l} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{i\kappa}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial g_{\kappa l}}{\partial x^i}\right)$

Καταλήγουμε στην εξίσωση : $g_{il}\frac{d\upsilon^i}{ds} + \Gamma_{l,i\kappa}\upsilon^i\upsilon^\kappa = 0$

Δηλαδή: $\quad \frac{d^2x_i}{ds^2} + \Gamma^i_{\kappa l}\frac{dx^\kappa}{ds}\frac{dx^l}{ds} = 0$