

# Posets minimaux ayant un groupe d'automorphismes d'ordre premier

CLAUDE CHAUNIER and NIK LYGEROS

**Résumé** : - Nous étudions les liens entre le nombre  $n$  de sommets d'un poset et l'ordre  $a$  de son groupe d'automorphismes. D'une part un théorème donne la valeur minimale de  $n$  et la structure explicite du poset minimal lorsque  $a$  est fixé et premier. Un corollaire fournit une majoration lorsque  $a$  est une puissance d'un nombre premier. D'autre part un tableau énumère les posets non isomorphes en fonction de  $n \leq 12$  et de  $a$ . Il précise la proportion des posets rigides et montre que le corollaire est optimal lorsque  $a$  est une petite puissance de 2.

Minimal posets having a automorphism group with prime order

**Abstract** : - We study the links between the number  $n$  of vertices and the order  $a$  of the automorphism group a poset has. On the one hand a theorem gives the minimal value of  $n$  and the explicit structure of the minimal poset when  $a$  is fixed and prime. A corollary provides an upper bound when  $a$  is a prime power. On the other hand a table enumerates the nonisomorphic posets according to  $n \leq 12$  and  $a$ . It specifies in which proportion the rigid posets are and shows that the corollary is sharp when  $a$  is a small power of 2.

**Théorème** : - Soient  $a$  un nombre premier et  $n$  le nombre minimal de sommets de posets ayant un groupe d'automorphismes d'ordre  $a$ . Alors :

- (i)  $n = a$  si  $a = 2$
- (ii)  $n = 3a$  si  $a = 3, 5$  ou  $7$
- (iii)  $n = 2a$  si  $a \geq 11$

des posets réalisant le minimum et possédant aussi un nombre minimal de relations étant respectivement :

- (i)  $(\{x_0, x_1\}, <)$  avec  $x_0$  et  $x_1$  incomparables ;
- (ii)  $(\{x_0, \dots, x_{a-1}, y_0, \dots, y_{a-1}, z_0, \dots, z_{a-1}\}, <)$  avec  $x_i < y_i < z_i$  et  $x_i < z_j$  si  $j - i = 1 \pmod{a}$
- (iii)  $(\{x_0, \dots, x_{a-1}, y_0, \dots, y_{a-1}\}, <)$  avec  $x_i < y_j$  si  $j - i = 0, 1$  ou  $3 \pmod{a}$

**Corollaire** : - Soit  $a = p^\alpha$  une puissance d'un nombre premier  $p$  et  $n$  le nombre minimal de sommets des posets ayant un groupe d'automorphismes d'ordre  $a$ . Alors

- (i)  $n \leq (1/2)f(4, \alpha)$  si  $p = 2$
- (ii)  $n \leq f(3p, \alpha)$  si  $p = 3, 5$  ou  $7$
- (iii)  $n \leq f(2p, \alpha)$  si  $p \geq 11$

avec

$$f(k, \alpha) = (k-1)\alpha + \sum_{i \geq 0} \beta_i \leq (k-1)\alpha + k \log_k(\alpha) + k$$

où les  $\beta_i \in \{0, 1, \dots, k\}$  sont définis de manière unique en fonction de  $\alpha$  et de  $k$  par :

$$\alpha = \sum_{i \geq 0} \beta_i u_i, u_n = (k^{n+1} - 1)/(k - 1), \sum_{i=0}^n \beta_i u_i < u_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$$

**Démonstration du théorème.** - Soit  $a \in \mathbb{N}^*$ ,  $P = (X, <)$  un graphe fini,  $n = |X|$  le nombre de ses sommets,  $A$  son groupe d'automorphismes,  $a$  l'ordre de  $A$ ,  $(X_i)_{1 \leq i \leq k}$  la partition de  $X$  en orbites sous l'action de  $A$ , enfin,  $k_2$  le nombre de  $X_i$  contenant plus d'un sommet.

**Lemme 1.** - Tous les  $|X_i|$  divisent  $a$ .  
 Désormais  $P$  est un poset.

**Lemme 2.** - Si  $a$  n'est pas une factorielle, alors  $k_2 \geq 2$ .

**Démonstration :** Si  $k_2$  est nul, alors  $a = 1$ . Et s'il n'y a qu'une seule orbite qui contient plus d'un élément, alors elle est composée de sommets ayant mêmes successeurs et mêmes prédécesseurs, ainsi toute permutation des sommets de cette orbite est un automorphisme de l'ordre.  
 Désormais  $n$  est minimal.

**Lemme 3.** - Si  $k_2 = 2$ , alors  $k = 2$ .

**Démonstration :** On considère le sous-poset constitué des deux seules orbites contenant plus d'un sommet. Il y a une bijection naturelle entre ses automorphismes et les automorphismes du poset originel. Par minimalité de  $n$  il n'y a donc pas d'autres orbites. Désormais,  $a$  est premier impair.

**Lemme 4.** - Si  $k_2 = 2$  alors  $|X_1| = |X_2| = a$  et  $n = 2a$ .

C'est une conséquence des lemmes 1 et 3. Notons maintenant  $P_{m,R}$  le poset défini sur  $\{x_0, x_1, \dots, x_{m-1}, y_0, y_1, \dots, y_{m-1}\}$  par  $x_i < y_j$  si et seulement si  $j - i$  divisé par  $m$  donne un reste qui est dans  $R$ . Ainsi  $P_{a,\{0,1,3\}}$  est le poset présenté dans le théorème lorsque  $a \geq 11$ . Voici des résultats généraux sur ces posets.

**Lemme 5.** - Soient  $m \in \mathbb{N}^*$ ,  $R \subseteq \{0, m-1\}$  et  $b$  le nombre d'automorphismes de  $P_{m,R}$

(5.1) Si  $R \neq \emptyset$  et  $R' = \{0, \dots, m-1\} \setminus R \neq \emptyset$  alors  $P_{m,R}$  et  $P_{m,R'}$  ont les mêmes automorphismes.

(5.2) Si  $c, d \in \{0, \dots, m-1\}$  sont premiers entre eux et  $R' \subseteq \{0, \dots, m-1\}$  avec  $R' = cR + d \pmod{m}$  alors  $P_{m,R}$  et  $P_{m,R'}$  sont isomorphes.

(5.3)  
 -  $R = \emptyset \Rightarrow b = (2m)!$   
 -  $R = \{0, \dots, m-1\} \Rightarrow b = (m!)^2$ ,

-  $R = \{0\} \Rightarrow b = (m!)$ ,

-  $R = \{0, r\} \neq \{0\} \Rightarrow b = (2m/d)^d d!$ , avec  $d = \text{pgcd}(m, r)$

(5.4)  $b = m \geq 3 \Rightarrow 3 \leq |R| \leq b - 3$

(5.5)  $b = m \iff$  l'identité est le seul automorphisme de  $P_{m,R}$  laissant fixe  $x_0$ .

(5.6)  $m = 3, 5$  et  $7 \Rightarrow b \neq m$

(5.7)  $R = \{0, 1, 3\}$  et  $m \geq 11 \Rightarrow b = m$ .

**Démonstration.** - Les premières assertions se démontrent automatiquement. Elles impliquent directement (5.6) si ce n'est pour :  $m = 7$  et  $R = \{0, 1, 2\}$  d'une part, et  $m = 7$  et  $R = \{0, 1, 3\}$  d'autre part. Dans le premier cas les permutations (0654321) et (2106543), portant respectivement sur les indices des  $x_i$  et des  $y_j$  forment un automorphisme ne vérifiant pas le membre droit de (5.5) donc  $b \neq m$ . Pour le deuxième cas on utilise les permutations (0 5 2 3 6 1 4) et (0 1 5 3 6 2 4). (5.7) s'établit par l'examen de tous les débuts possibles des permutations (par notre méthode il y a 17 cas à traiter), qui montrent l'inexistence d'un automorphisme non trivial laissant fixe  $x_0$ .



Supposons alors  $p \geq 11, k = 2p, \alpha$  écrit en base "k-rep-unit" comme dans l'énoncé du corollaire, et  $P = P_{p,\{0,1,3\}}$ . L'union disjoint  $\bigcup_{i \geq 0} C_{\beta_i}(P^i)$  possède un groupe d'automorphisme d'ordre  $\prod_{i \geq 0} 1 \times (p^{u_i})^{\beta_i} = p^\alpha$  d'après les lemmes 7 et (5.7), et  $\sum_{i \geq 0} \beta_i k^{i+1} = (k-1)\alpha + \sum_{i \geq 0} \beta_i$  sommets comme requis. A quelques précautions près pour la connexité, les cas où  $p = 2, 3, 5$  et  $7$  sont analogues.

Remarque. - Lorsque  $a = \prod p^{\alpha_p}$ , une majoration élémentaire de  $n$  est obtenue en sommant les majorations données pour les  $p^{\alpha_p}$ , mais il y a souvent mieux : le cas extrême survient lorsque  $a$  est une factorielle. Un exemple moins évident est donné avec  $P_{11,\{0,1,3\}}(P_{13,\{0,1,3\}})$

Ce travail a été financé en partie par le CNRS - Projet Médicis. Nous remercions également l'aide de R. Chaunier. et celle de J. Marchand.

Note remise le 5 octobre 1993, acceptée après révision le 9 février 1994.

#### Références bibliographiques

- [1] C. Chaunier et N. Lygeros, Progrès dans l'énumération des posets, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 314. série I. 1992. p. 691-694.
- [2] R. Fraïssé et N. Lygeros. Petits posets : dénombrement, représentabilité par cercles et « compenseurs ». *C.R. Acad. Sci. Paris*, 313. série I. 1991. p. 417-420.
- [3] Wei-ping Liu, I Rival et Nejib Zaguia, Automorphisms, isotone self-maps and cycle-free orders. prépublication.
- [4] M. H. El-Zahar, Enumeration of ordered sets, in *Algorithms and order*, I. Rival, éd., Kluwer Academic Publishers. 1989. p. 327-352.
- [5] H. J. Prömel, Counting unlabeled structures, *J. Comb. Theory, série A*. 44. 1987, p. 83-93.
- [6] M. Erné, Problem 5.3, in *Ordered Sets*, I. Rival, éd. Reidel, 1982 p. 818.
- [7] R. W. Quackenbush, Enumeration in classes of ordered structures, in *Ordered sets*, I. Rival éd., Reidel, 1982, p. 523-554.