Remarques sur le théorème de primalité de $\tau(n)$

N. Lygeros et O. Rozier

En 1965, D. H .Lehmer a démontré le théorème suivant.

<u>Théorème</u> : L'entier $\tau(n)$ est composé pour $2 \leq n \leq 63000$ mais $\tau(63001)$=80561663527802406257321747 est un nombre premier.

Il construit sa démonstration sur un raisonnement par l'absurde pour la première partie et exploite une propriété sur les nombres de Fibonacci pour la seconde. Nos remarques concernent exclusivement la première partie.

Pour démontrer qu'il n'existe pas de nombre inférieur à 63000 qui produise un nombre premier, il exploite la propriété $\tau(mn) = \tau(m)\tau(n)$, qui montre que la solution doit nécessairement être une puissance de nombre premier.

Ensuite il examine le cas de $\tau(n) = 2$. En réalité, il est préférable de montrer directement que toutes les puissances impaires de nombres premiers produisent le résultat suivant

$$\tau(p) \mid \tau(p^{2n+1})$$

De plus comme $\tau(n)$ est impaire si et seulement si n est un carré impair, nous en déduisons que $2 \mid \tau(p)$. Il suffit donc d'examiner le cas $\tau(p) = \pm 2$.

Le cas $\tau(p) = -2$ est trivial car $\tau(p) \equiv \sigma(p) \equiv 1 + p[3]$ et $\tau(3) = 252$, comme l'indique justement D. H. Lehmer.

Pour traiter le cas $\tau(p) = 2$, il utilise les congruences suivantes :

Si n est impair $\tau(n) \equiv \sigma_3(n)[32]$, et $\tau(n) \equiv \sigma_{11}(n)[691]$

Dans le cas où $\tau(p) = q > 2$, D. H. Lehmer remarque que $p \nmid \tau(p)$ pour $p \neq 3,5,7$ aussi $p \geq 11$.

Comme $63000 < 17^4 < 11^6$, il ne traite que $\tau(11^4)$ qui est divisible par 5 et $\tau(13^4)$ qui est divisible par 25741.

Aussi il ne lui reste à examiner que les cas suivants :

$\tau(p^2)$ pour $11 \leq p < 251$

Cette fois, il utilise aussi la congruence suivante.

Si $3p = u^2 + 23v^2$ alors $\tau(p) \equiv -1[23]$

Néanmoins malgré cela, il est encore nécessaire d'effectuer certains calculs explicites avec des cas non triviaux comme ceux-ci :

$\tau(149^2)$ a pour plus petit diviseur 49139

$\tau(227^2)$ a pour plus petit diviseur 51869

Cette démonstration représente l'état de l'art de l'époque dans le cadre d'une approche élémentaire sans la possibilité d'utiliser une force brute colossale.