

## Παρατηρήσεις περί θεωρήματος του Чебышев

Νίκος Λυγερός

Το θεώρημα του Чебышев είναι η απόδειξη της εικασίας του Bertrand. Η εικασία διατυπώθηκε το 1845 και ο Joseph Bertrand (1822 -1900) την εξέτασε έως τα 3 εκατομμύρια. Πέντε χρόνια χρειάστηκαν για να μετατραπεί η εικασία σε θεώρημα από τον Пафнутий Чебышев (1821-1894) θεώρημα της θεωρίας με εφαρμογές και στη θεωρία ομάδων. Ενώ η αρχική του απόδειξη χρησιμοποιεί τον τύπο του Stirling, ο Srinivasa Ramanujan (1887-1913) κατάφερε να βρει μια πιο απλή μέθοδο. Τώρα εκμεταλλευόμαστε στη θεωρία αριθμών την ακόμα πιο απλή απόδειξη του Pál Erdős (1913-1996) την οποία ανακάλυψε το 1932. Η ιδέα του είναι κομψή. Βασίζεται αρχικά στη συνάρτηση

$$\theta(x) = \sum_{p \leq x} \ln(p)$$

όπου  $p$  ανήκει στο σύνολο των πρώτων αριθμών μικρότερους του  $x$ . Ο Pál Erdős απέδειξε επαγωγικά το εξής:

$$\forall n \geq 1: \theta(n) < n \ln 4$$

Μετά μέσω των πρώτων αριθμών 3, 5, 7, 13, 23, 43, 83, 163, 317, 631, 1259 και 2503, ο καθένας τους είναι απόλυτα μικρότερος από το διπλάσιο του προηγούμενου, απέδειξε ότι το θεώρημα ισχύει για  $n \leq 2048$ .

Και για το τελικό μέρος της απόδειξης έκανε χρήση της ιδιότητας του δυνάμμου του Newton στην ειδική περίπτωση όπου έχουμε:

$$1^n = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}$$

και τον  $R(p, n)$ , ο οποίος είναι ο μεγαλύτερος  $x$  τέτοιος ώστε

$$p^x \mid \binom{2n}{n}$$

Καταλήγει στο αρχικό θεώρημα με το συνδυασμό αυτών των στοιχείων. Γι αυτό το λόγο αυτό το θεώρημα, όπως και το θεώρημα των πρώτων αριθμών ανήκει πλέον στη στοιχειώδη θεωρία αριθμών.