Υπολογισμός των εξισώσεων του Einstein

Ν. Λυγερός

Έστω $\delta\int R\sqrt{-g}d\Omega = \delta\int g^{ik}R_{ik}\sqrt{-g}d\Omega$

$$\delta\int R\sqrt{-g}d\Omega = \int\left\{R_{ik}\sqrt{-g}\delta g^{ik} + R_{ik}g^{ik}\delta\sqrt{-g} + g^{ik}\sqrt{-g}\delta R_{ik}\right\}d\Omega$$

Καθώς $dg = gg^{ik}dg_{ik} = -gg_{ik}dg^{ik}$

Έχουμε: $\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\delta g = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{ik}\delta g^{ik}$

Μέσω αντικατάστασης βρίσκουμε:

$$\delta\int R\sqrt{-g}d\Omega = \int\left(R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R\right)\delta g^{ik}\sqrt{-g}d\Omega + \int g^{ik}\delta R_{ik}\sqrt{-g}d\Omega$$

Ενώ Γ^i_{kl} δεν είναι τανυστές, οι μεταβολές $\delta\Gamma^i_{kl}$ είναι, διότι ένα τυπικό γεωδαισιακό σύστημα συντεταγμένων. Σε αυτό το σημείο όλα τα $\Gamma^i_{kl} = 0$

Με την εφαρμογή της σχέσης $R^l_{m;l} = \frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial x^m}$ στο R_{ik} έχουμε

$$g^{ik}\delta R_{ik} = g^{ik}\left\{\frac{\partial}{\partial x^l}\delta\Gamma^l_{ik} - \frac{\partial}{\partial x^k}\delta\Gamma_{il}\right\}$$

$$g^{ik}\delta R_{ik} = g^{ik}\frac{\partial}{\partial x^l}\delta\Gamma^l_{ik} - g^{il}\frac{\partial}{\partial x^l}\delta\Gamma^k{}_{il}$$

$g^{ik}\delta R_{ik} = \frac{\partial w^l}{\partial k^l}$ όπου $w^l = g^{ik}\delta\Gamma^l_{ik} - g^{il}\delta\Gamma^k_{ik}$

Καθώς w^l είναι διάνυσμα, η σχέση έχει νόημα σε οποιοδήποτε σύστημα συντεταγμένων.

Έχουμε λοιπόν: $g^{ik}\delta R_{ik} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^l}\left(\sqrt{-g}w^l\right)$

Κατά συνέπεια: $\int g^{ik}\delta R_{ik}\sqrt{-g}d\Omega = \int\frac{\partial\left(\sqrt{-g}w^l\right)}{\partial x^l d\Omega}$

Μέσω του θεωρήματος του Gauss και της ολοκλήρωσης μπορούμε να μηδενίσουμε αυτό το στοιχείο.

Έτσι η μεταβολή της βαρυτικής δράσης είναι:

$$\delta Sg = -\frac{c^3}{16\pi k}\int\left(R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R\right)\delta g^{ik}\sqrt{-g}d\Omega$$

Καθώς $\frac{1}{2}\sqrt{-g}T_{ik} = \frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial g^{ik}}\Lambda = -\frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial\sqrt{-g}\Lambda}{\partial\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}}$

και $\delta S = -\frac{1}{2c}\int T^{ik}\delta g_{ik}\sqrt{-g}d\Omega$

η μεταβολή της δράσης της μάζας είναι: $\delta S_m = \frac{1}{2c}\int T_{ik}\delta g^{ik}\sqrt{-g}d\Omega$

Μέσω της αρχής της ελάχιστης δράσης $\delta S_m + \delta S_g = 0$

Υπολογίζουμε το εξής:

$$-\frac{c^3}{16\pi k}\int\left(R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R - \frac{8\pi k}{c^4}T_{ik}\right)\delta g^{ik}\sqrt{-g}d\Omega = 0$$

Άρα $R_{ik} = -\frac{1}{2}g_{ik}R = \frac{8\pi k}{c^4}T_{ik}$

οι οποίες είναι οι εξισώσεις του Einstein.