Υπολογισμοί του ολοκληρώματος μονοπατιού του Feynman

Ν. Λυγερός

$$K\left(x,x^{'};t,t^{'}\right)=\int K\left(x,x'';t,t''\right)K\left(x'',x^{'};t'',t^{'}\right)dx''$$
$$K\left(x,x^{'};t,t^{'}\right)=\left\langle x\middle|T\left(t,t^{'}\right)\middle|x^{'}\right\rangle$$

$$K\left(x,x^{'};t,t^{'}\right)=\int\left\langle x\middle|T\left(t,t''\right)\middle|x''\right\rangle\left\langle x''\middle|T\left(t'',t^{'}\right)\middle|x^{'}\right\rangle dx''$$

Διότι $T\left(t,t^{'}\right)=T\left(t,t''\right)T\left(t'',t^{'}\right)$

Ο διαμερισμός του τμήματος $\left[t^{'},t\right]$ σε N απειροελάχιστα τμήματα χρονικού μήκους ε οδηγεί στον τύπο

$$K\left(x,x^{'};t,t^{'}\right)=\int\ldots\int K_{\mathrm{N}-1}\ldots dx_1K\left(x,x_{\mathrm{N}-1};t,t-\varepsilon\right)\ldots$$
$$K\left(x_2,x_1,t^{'}+2\varepsilon,t^{'}+\varepsilon\right)K\left(x_1,x^{'};t^{'}+\varepsilon,t^{'}\right)$$

Κατά προσέγγιση έχουμε

$$K\left(x_n,x_{n-1};\varepsilon\right)=C\left(t_{n-1},t_n\right)e^{\frac{i}{\hbar}S\left(x_n,x_{n-1};t_n,t_{n-1}\right)}$$

Ο πολλαπλασιασμός των N στοιχειωδών διαδοτών για ένα ειδικό μονοπάτι στον προηγούμενο ολοκλήρωμα μέσω των ορίων $\varepsilon\to 0$ και $\mathrm{N}\to+\infty$, μας δείχνει με την προσθετική ιδιότητα της συνάρτησης δράσης ότι κάθε μονοπάτι έχει την εξής συμβολή

$$S\left[x(t)\right]\equiv\int_{t^{'}}^{t}L\left(x\left(t''\right),\dot{x}\left(t''\right),t''\right)dt''$$

Η αντικατάσταση αυτών των αποτελεσμάτων στο αρχικό ολοκλήρωμα μας δίνει τον τύπο του ολοκλήρωμα μονοπατιού του Feynman.

$$\langle x,t|x',t'\rangle=K\left(x,x^{'};t,t^{'}\right)=C\sum_{\substack{\text{όλα}\\\text{τα}\\\text{μονοπάτια}}}e^{\frac{i}{\hbar}S\left[x(t)\right]}$$

$$\langle x,t|x',t'\rangle=C\int e^{\frac{i}{\hbar}S\left[x(t)\right]}D\left[x(t)\right]$$

Όπου $D\left[x(t)\right]$ είναι το διαφορικό του συναρτησιακού ολοκληρώματος.