Remarque sur la formule de Minkowski-Siegel

N. Lygeros

Pour définir la formule de Minkowski-Siegel, nous avons besoin de quelques notions préliminaires. Notre cadre théorique est celui des formes quadratiques entières à discriminant ±1. Pour cela nous considérons la présentation de Jean-Pierre Serre. L'étude concerne la catégorie Sn. Un objet E de Sn est un groupe abélien libre de rang n, muni d'une forme bilinéaire symétrique ExE → ℤ, notée (x,y) →x.y, telle que l'homomorphisme de E dans Hom (E,ℤ) définie par la forme x.y est un isomorphisme. Nicolas Bourbaki a démontré que cette condition est équivalente à la suivante. Si (e_i) est une base de E, et si $a_{ij} = e_i.e_j$, le déterminant de la matrice A = (a_{ij}) est égale à ±1.

Nous notons $S = \bigcup_{n \in N} S_n$. Soit E ∈ S.

E est <u>pair</u> (ou de type II) si la forme quadratique associée à E ne prend que des valeurs paires. Si E n'est pas pair, il est dit impair (ou de type I).

<u>Théorème de la finitude</u> : Pour tout entier n, Sn ne contient qu'un nombre fini de classes définies positives.

La détermination explicite (pour n ≤ 16) a été effectuée par Hellmuth Kneser. Une autre manière d'aborder cette étude, c'est d'exploiter la formule de Minkowski-Siegel.

Dans le cas du type II, nous avons les résultats suivants. Soit n = 8K et C_n, l'ensemble des classes, à isomorphisme près, d'éléments E∈Sn, qui sont définis positifs de type II. Si E ∈ Sn, soit G_E le groupe d'automorphismes de E.

Soit g_E l'ordre de G_E. Alors la masse de C_n, au sens d'Eisenstein est : $M_n = \sum_{E \in C_n} \frac{1}{g_E}$

Dans ce cadre la formule de Minkowski-Siegel donne la valeur de M_n explicitement

$$M_n = 2^{1-8k} \frac{B_{2k}}{(4k!)} \prod_{j=1}^{j=4k-1} B_j \quad (n = 8k)$$

Les B_j sont les nombres de Bernouilli

$$B_1=\frac{1}{6},B_2=\frac{1}{30},B_3=\frac{1}{42},B_4=-\frac{1}{30},$$
$$B_5=\frac{5}{66},B_6=-\frac{691}{2730},B_7=\frac{7}{6},B_8=-\frac{3617}{510},$$
$$B_9=\frac{43867}{798},B_{10}=-\frac{174611}{330},B_{11}=\frac{854513}{138},B_{12}=-\frac{236364091}{2730},$$
$$B_{13}=\frac{8553103}{6},B_{14}=-\frac{23749461029}{870},B_{15}=\frac{8615841276005}{14322},$$
$$et\ \ B_{16}=-\frac{7709321041217}{510}$$

La fonction génératrice de ces nombres est $\frac{x}{e^x-1}$

Cela permet de calculer les masses suivantes

$$M_8=2^{-14}.3^{-5}.5^{-2}.7^{-1}$$
$$M_{16}=691.2^{-30}3^{-10}5^{-4}7^{-2}11^{-1}13^{-1}$$
$$M_{24}=\frac{43867.593.131.283.617.691^2.3617}{23.17.2^{45}.3^{17}.5^7.7^4.11^2.13^2.19}$$
$$M_{32}=$$
$$\frac{103.131.283.593.617.691.1001259881.43867.2294797.362903.657931.3617^2.9349.1721}{2^{62}.3^{22}.5^9.7^5.11^3.13^2.17^2.19.23.29.31}$$
$$M_{40}=$$
$$\frac{103.131.283^2.593.617^2.683.691.1001259881.154210059915661.151628697551.26315271553053477373.43867.2294797.362903.305065927.657931.3617.9349.1721}{2^{77}.3^{28}.5^{12}.7^6.11^4.13^3.17^2.19^2.23.29.31}$$

<u>Théorème (Mordell)</u> : $C_8=\{\Gamma_8\}$

Où Γ_8 est le module quadratique E est un élément de S_8

<u>Schéma de la démonstration</u> : $M_8=2^{-14}.3^{-5}.5^{-2}.7^{-1}$

et $$|Aut(\Gamma_8)|=2^{14}.3^5.5^2.7$$ $$M_8=1/|Aut(\Gamma_8)|$$ (cf. Nicolas Bourbaki)

<u>Théorème (Witt)</u> : $C_{16}=\{\Gamma_{16},\Gamma_8\oplus\Gamma_8\}$

<u>Schéma de la démonstration :</u>

$$|Aut(\Gamma_{16})|=2^{15}(16!)$$
$$|Aut(\Gamma_8\oplus\Gamma_8)|=2^{29}3^{10}5^47^2$$
$$M_{16}=691.2^{-30}3^{-10}5^{-4}7^{-2}11^{-1}13^{-1}$$

$$M_{16} = 1 \big/ \left|Aut(\Gamma_{16})\right| + 1 \big/ \left|Aut(\Gamma_8 \oplus \Gamma_8)\right|$$

Théorème de Niemeier C_{24} a 24 éléments.

Pour n=32, les difficultés sont d'un autre ordre. En effet, comme $M_{32} > 4.10^7$ et $g_E \geq 2$ pour tout E, C_{32} à nécessairement plus de 80 millions d'éléments.